Περιοδική έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου

https://mathsgymnasio.wordpress.com/

Η «Περιοδική Έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου» επιλέχθηκε μετά από πρόσκληση και κρίση ως βέλτιστη πρακτική διδασκαλίας για τη βιωματική μάθηση των θετικών επιστημών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Η πρακτική παρουσιάστηκε στο πλαίσιο του Ευρωπαϊκού προγράμματος «March: Making Science Real in Schools».

Υπουργείο Πολιτισμού, Παιδείας και Θρησκευμάτων
Τμήμα Εκπαιδευτικής Ραδιοτηλεόρασης.
Μάρτιος 2015

Τεύχος 7

Περιεχόμενα

Δημιουργοί: Δουκάκης Σπυρίδων & Σαράφης Ιωάννης

Συγγραφική συμβολή: Γκαρμπολάς Κωνσταντίνος & Πρωτοπαπάς Δημήτριος

Κριτική ανάγνωση: Δημητρουλάκη Εμμανουέλλα, Ζαχαρίας Ιωάννης, Κάντα Σπυριδούλα & Μιχαλοπούλου Γεωργία

Αθήνα, Δεκέμβριος 2015
Έκδοση 1.1

ISSN: 2241-9381

Πρόλογος

Με το έβδομο τεύχος της περιοδικής έκδοσης για τα Μαθηματικά Γυμνασίου συνεχίζεται η προσέγγιση της ύλης των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου. Στο τρέχον τεύχος περιλαμβάνεται διδακτικό υλικό για ένα κεφάλαιο της γεωμετρίας: «Κεφάλαιο 1, Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων» μαζί με ένα επαναληπτικό υλικό στα σχήματα και ένα κεφάλαιο της άλγεβρας: «Κεφάλαιο 2, Πραγματικοί αριθμοί». Το υλικό μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο στο πλαίσιο της σχολικής τάξης, όσο και στο σπίτι από τον ίδιο τον μαθητή και την μαθήτρια.

Το υλικό περιλαμβάνει φύλλα εργασίας τα οποία είναι δομημένα σε μορφή δίστηλου. Τα φύλλα εργασίας περιλαμβάνουν στην αριστερή στήλη και μέσα σε κατάλληλα πλαίσια θεωρία, χρήσιμες πληροφορίες, ιστορικά σημειώματα κ.α., τα οποία χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένα εικονίδια[1] για να μπορεί ο μαθητής και η μαθήτρια να διακρίνει το στόχο τους. Στο κύριο μέρος του φύλλου εργασίας ο μαθητής καλείται να εργαστεί ατομικά ή συνεργατικά για να οικοδομήσει τις γνώσεις τους, μέσα σε ένα πλαίσιο σκαλωσιάς μάθησης, βάσει του ισχύοντος προγράμματος σπουδών, των οδηγιών διδασκαλίας, του υλικού του σχολικού βιβλίου και του υλικού του βιβλίου εκπαιδευτικού. Το υλικό συνοδεύεται από επιλεγμένα μικροπειράματα[2] που προέρχονται από το ψηφιακό σχολείο, από άλλες πηγές ή έχουν αναπτυχθεί από τους συγγραφείς. Κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ασκήσεις, που καλείται να λύσει ο μαθητής. Οι ασκήσεις έχουν αναπτυχθεί με γνώμονα τις ανάγκες της σχολικής τάξης και την εμβάθυνση των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες.

Τα φύλλα εργασίας και οι ασκήσεις αποτελούν μία οργανωμένη συγκέντρωση των υπαρχουσών πηγών υλικού και στοχεύουν στην υποστήριξη της μάθησης των μαθητών και στην ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης, μέσα από ένα πλούσιο σε πηγές πλαίσιο. Για το λόγο αυτό το υλικό προσφέρεται με άδεια Creative Commons, ώστε να είναι διαθέσιμο και «ανοικτό» σε όλη την εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα.

Το υλικό έχει δομηθεί με την υποστήριξη ομάδας εκπαιδευτικών , έχει δουλευτεί στις τάξεις, έχει αξιοποιηθεί από δεκάδες μαθητές και μαθήτριες και από αρκετούς εκπαιδευτικούς. Ευχαριστούμε για τη βοήθεια όλους τους συναδέλφους που μας στηρίζουν σε αυτή την προσπάθεια.

Το Τεύχος 7 περιέχει υλικό για τα ακόλουθα:

- **Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄, Κεφάλαιο 1, Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων**
- **Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Κεφάλαιο 2, Πραγματικοί αριθμοί**

Καλή μελέτη!

Σπυρίδων Δουκάκης & Ιωάννης Σαράφης
mathsgymnasio@gmail.com

[1] Τα εικονίδια προέρχονται από το βιβλίο: Βακάλη Α., Γιαννόπουλος Η., Ιωαννίδης Ν., Κοίλιας Χ., Μάλαμας Κ., Μανωλόπουλος Ι., Πολίτης Π. (1999), *Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον*, ΙΤΥΕ, Διόφαντος.

[2] Τα μικροπειράματα προέρχονται από το Ψηφιακό σχολείο (dschool.edu.gr) και έχουν αναπτυχθεί από την ομάδα του Εργαστήριου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας με συντονιστή τον Καθ. Κυνηγό Χρόνη.

Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄, Κεφάλαιο 1,
Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων

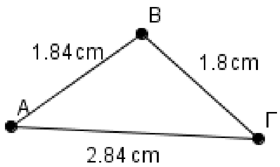
Μέρος Β΄ Κεφάλαιο 1ο Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων

Επαναληπτικές έννοιες: Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

~

Κύρια στοιχεία τριγώνου



Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις κορυφές Α, Β, Γ, τρεις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και τρεις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

Τα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, εκτός από τις πλευρές, συμβολίζουν και τα μήκη των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων.

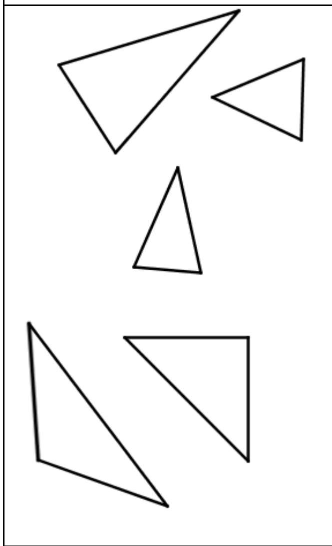
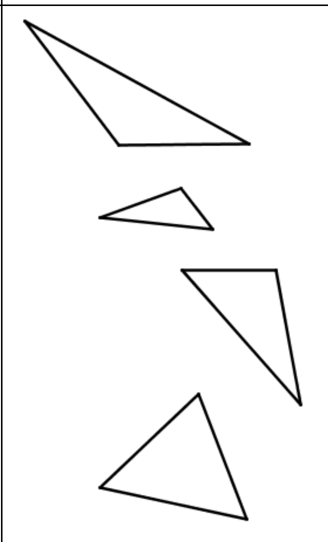
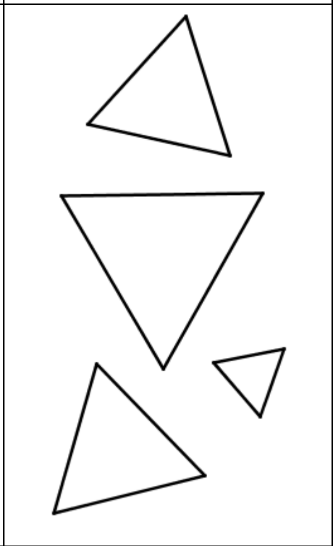
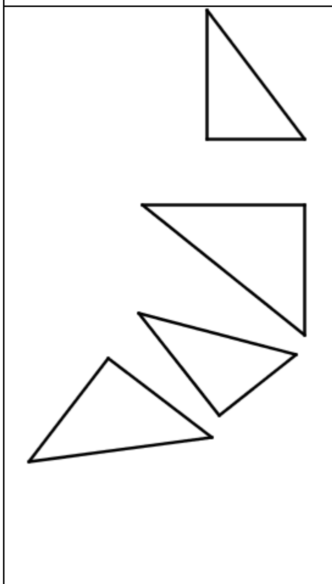
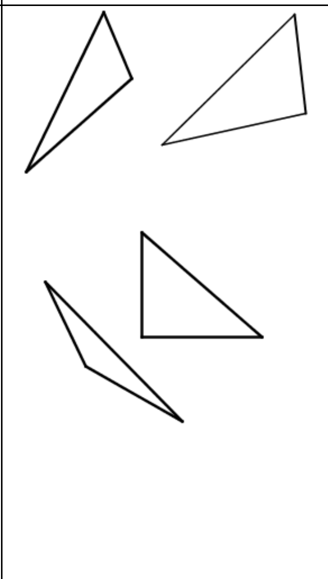
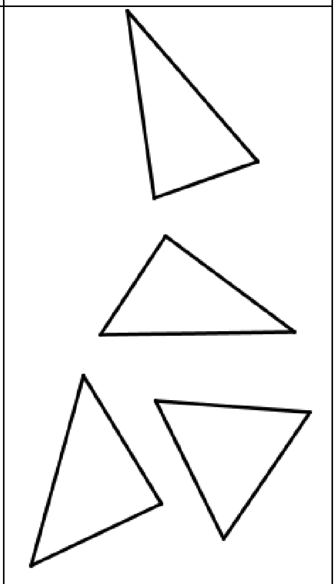
Θυμηθείτε ότι κάθε τρίγωνο έχει:
3 γωνίες και 3 πλευρές.
Κατόπιν αναγνωρίστε τα τρίγωνα σύμφωνα με τα κριτήρια κατάταξης των τριγώνων:
1ο κριτήριο:
Πλευρές κάθετες - όχι κάθετες (μία γωνία > 90° / όλες οι γωνίες <90°)
2ο κριτήριο:
Ισότητα πλευρών - ανισότητα πλευρών.

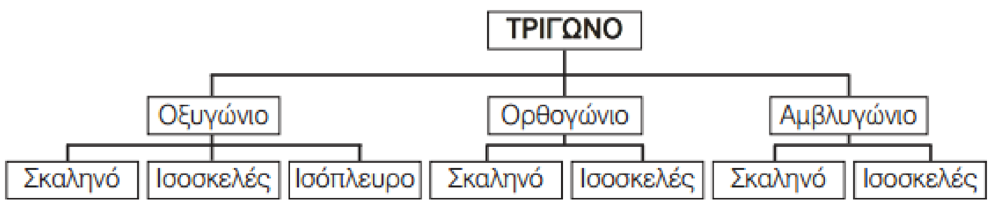
Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το **σκαληνό**, το **ισοσκελές** και το **ισόπλευρο**.

Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, διακρίνεται σε **οξυγώνιο**, **ορθογώνιο** και **αμβλυγώνιο**.

1. Δραστηριότητα

Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp1.ggb και καταγράψτε τον τύπο του τριγώνου.

Τύπος τριγώνου	Τύπος τριγώνου	Τύπος τριγώνου
		
		



Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς, λέγεται **διάμεσος**.

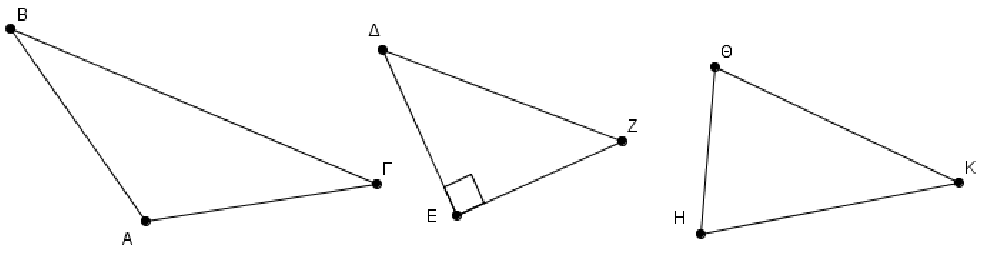
Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την κάθε κορυφή του τριγώνου, χωρίζει την αντίστοιχη γωνία σε δυο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά λέγεται **διχοτόμος του τριγώνου**.

Το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την κάθε κορυφή του τριγώνου και καταλήγει κάθετα στην απέναντι πλευρά λέγεται **ύψος του τριγώνου**.

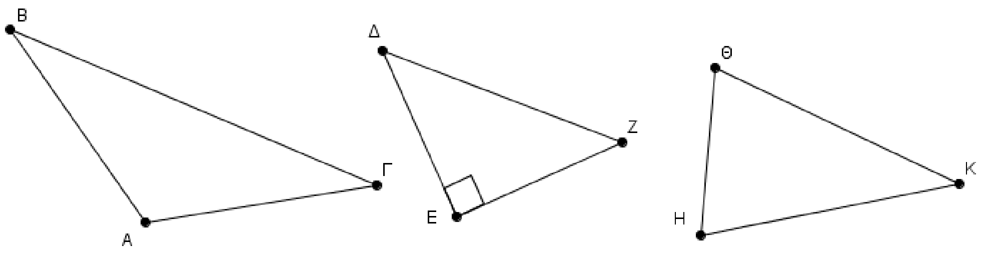
2. Πόσες διαμέσους, ύψη και διχοτόμους έχει κάθε τρίγωνο;

……

3. Να φέρετε τις διαμέσους στα ακόλουθα τρίγωνα:



4. Να φέρετε τα ύψη στα ακόλουθα τρίγωνα. Μελετήστε το μικροπείραμα [mp2.ggb].



Καταγράψτε τον τρόπο με τον οποίο φέρνουμε τα ύψη σε ένα **οξυγώνιο**, σε ένα **αμβλυγώνιο** και σε ένα **ορθογώνιο** τρίγωνο;

…………………………………	…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………	…………………………………

Για το σπίτι

1. Τοποθετήστε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση

	Σωστό	Λάθος
α) Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχει μια ορθή γωνία.	◯	◯
β) Το αμβλυγώνιο τρίγωνο έχει δύο αμβλείες γωνίες.	◯	◯
γ) Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες.	◯	◯
δ) Το ισοσκελές τρίγωνο μπορεί να είναι και αμβλυγώνιο.	◯	◯
ε) Το ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισόπλευρο.	◯	◯
στ) Το ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισοσκελές.	◯	◯
ζ) Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο.	◯	◯
η) Ένα σκαληνό τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο	◯	◯

2. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με πλευρά ΒΓ = 4,4 cm, φέρτε τη διάμεσο ΑΜ. Μετά φέρτε τις διάμεσους ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΜ και ΑΓΜ και βρείτε το μήκος των ΚΜ και ΑΓ.

3. Σχεδιάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τις διάμεσους του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Δικαιολογήστε γιατί οι διάμεσοι του ισόπλευρου είναι διχοτόμοι και ύψη του.

4. Σχεδιάστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ.

α) Βρείτε το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ, το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ και το μέσο Ζ της πλευράς ΓΑ.

β) Σχεδιάστε τη διάμεσο ΑΕ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει τη ΖΔ στο σημείο Μ. Συγκρίνετε με το διαβήτη τα τμήματα ΔΜ και ΜΖ. Τι παρατηρείτε;

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.

α) Φέρτε τις διάμεσους ΑΜ και ΒΝ και ονομάστε με το γράμμα Θ το σημείο στο οποίο τέμνονται.

β) Μετά σχεδιάστε την ευθεία ΓΘ και ονομάστε με το γράμμα Ρ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΓΘ τέμνει την πλευρά ΑΒ.

γ) Συγκρίνετε με το διαβήτη τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΡ και ΒΡ. Τι παρατηρείτε;

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα σχήματα των αντίστοιχων τριγώνων.

ΤΡΙΓΩΝΑ	Οξυγώνιο	Ορθογώνιο	Αμβλυγώνιο
Σκαληνό			
Ισοσκελές			
Ισόπλευρο			

Παραλληλόγραμμο - Ορθογώνιο - Τραπέζιο

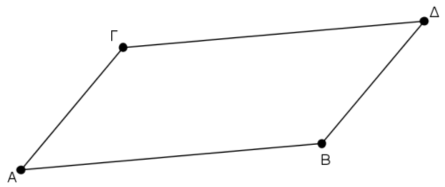
∼

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να θεωρηθεί και βάση.

Ύψος λέγεται η απόσταση δύο απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου.

5. Δίνεται το ακόλουθο παραλληλόγραμμο:

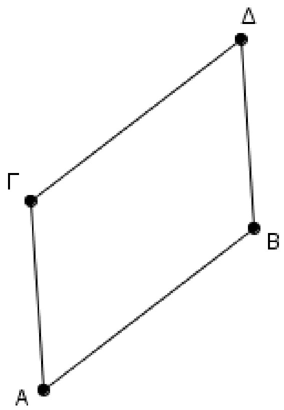


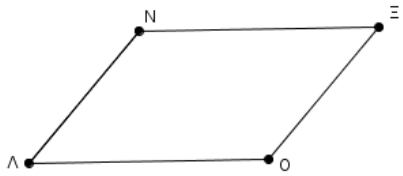
Να προσδιορίσετε τις παράλληλες πλευρές του: .... | ....

6. Δίνονται τα ακόλουθα παραλληλόγραμμα

α) Να σχεδιάσετε τα ύψη του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που άγονται από την κορυφή Β.

β) Να σχεδιάσετε τα ύψη του παραλληλογράμμου ΛΝΞΟ που άγονται από την κορυφή Λ.





Τι παρατηρείτε για τα ύψη στα παραπάνω σχήματα;

....

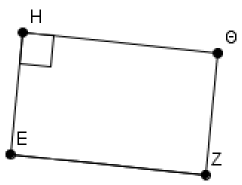
....

....

....

Ορθογώνιο παραλληλό-γραμμο ή απλά **ορθογώνιο** λέγεται ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ ισχύει $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

7. Μελετήστε το ακόλουθο σχήμα.

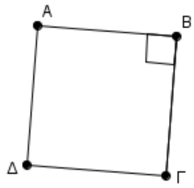


α) Τι παρατηρείτε ως προς τις γωνίες του;

....

β) Να φέρετε τα ύψη του.

8. Μελετήστε το ακόλουθο σχήμα.



Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **τετράγωνο**. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ ισχύει:
$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^{\circ}$ και
ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ

α) Τι παρατηρείτε ως προς τις γωνίες του;

....

....

β) Τι παρατηρείτε ως προς τις πλευρές του;

....

....

γ) Να φέρετε τα ύψη του.

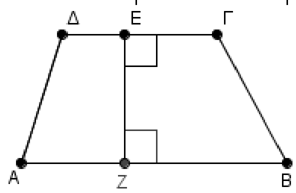
Τραπέζιο λέγεται το τετράπλευρο που έχει **μόνο** δύο πλευρές παράλληλες.

Βάσεις λέγονται οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου.

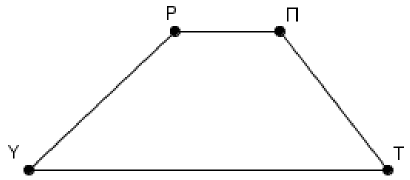
Ύψος λέγεται η απόσταση των βάσεων του.

9. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ να προσδιορίσετε:

Τις παράλληλες πλευρές	Τις βάσεις	Το ύψος	Μικρή βάση	Μεγάλη βάση



10. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ να φέρετε τα ύψη από το Π και από το Τ.



Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.

Β. 1.1. Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

~

Το εμβαδόν

Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε.

11. Έχετε δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα με κάθετες πλευρές 5 cm και ένα τετράγωνο πλευράς 5 cm.

α) Μπορείτε χρησιμοποιώντας τα τρία αυτά σχήματα να κατασκευάσετε:
- **i) Ένα ορθογώνιο πλάτους 10 cm και ύψους 5 cm;**
- **ii) Ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου οι κάθετες πλευρές είναι 10 cm;**
- **iii) Ένα ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις 5 cm και 15 cm;**

β) Τι έκταση καταλαμβάνουν τα παραπάνω σχήματα στο επίπεδο, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μέτρησης το τετραγωνάκι  πλευράς 1 cm;

(Βρείτε τα τρίγωνα και το τετράγωνο στο παράρτημα).

....

....

....

....

....

12. Στον ορισμό αναφέρθηκε ότι: το εμβαδόν μιας επιφάνειας εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε. Ας πειραματιστούμε με το γράμμα Σ για να διαπιστώσουμε αν ισχύει η παραπάνω πρόταση. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γράμματος χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού:

α)  **β)**  **γ)** 

α) ....

....

β) ....

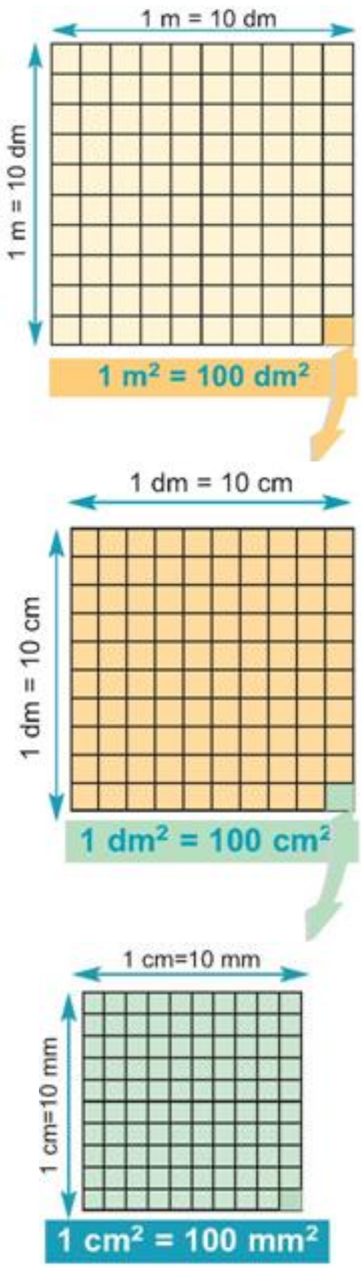
....

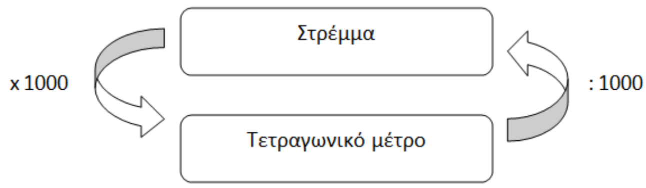
γ) ....

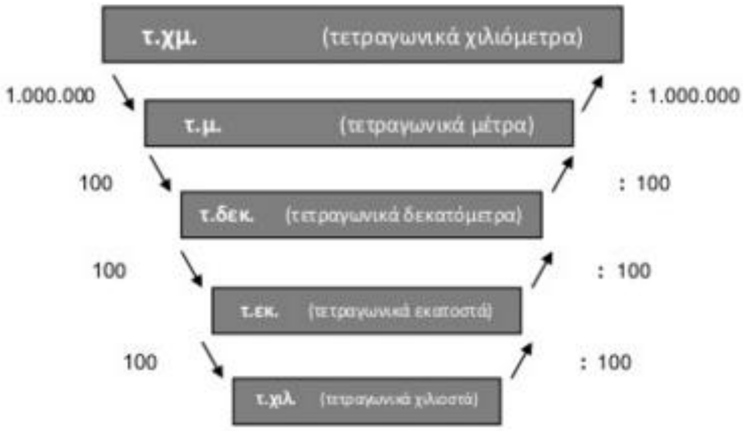
....

Β. 1.2. Μονάδες μέτρησης επιφανειών

∼

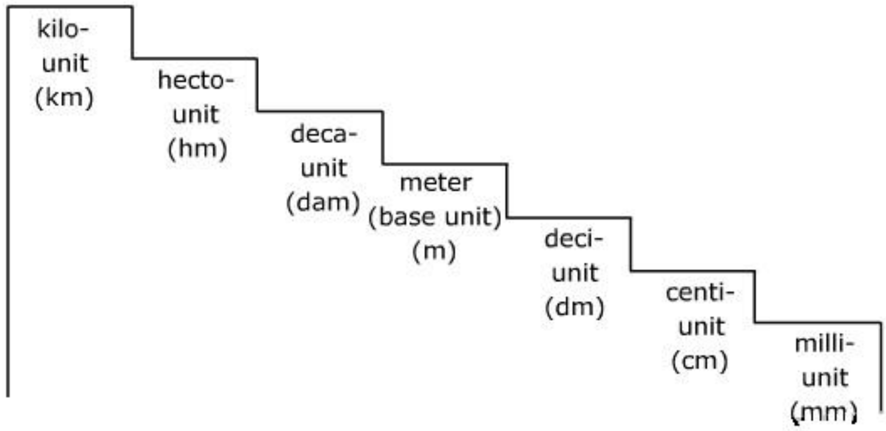






http://www.slideshare.net/xristosxarmpis/532-44931842

Μία μέθοδος για να μετατρέπετε μονάδες μέτρησης είναι να έχετε στο νου σας μία σκάλα με την μεγαλύτερη μονάδα μέτρησης στην κορυφή και την μικρότερη στην αρχή της σκάλας.



α) Προσδιορίστε το σκαλοπάτι πού βρίσκεται η μονάδα που θέλετε να μετατρέψετε.

β) Ας υποθέσουμε ότι η μονάδα που θέλετε να μετατρέψετε είναι από τετραγωνικά μέτρα (m^2) σε τετραγωνικά χιλιόμετρα (km^2) και πιο συγκεκριμένα ότι θέλετε να μετατρέψετε 1500 m^2 σε km^2.

γ) Μετρήστε τα βήματα για να φτάσετε στην νέα μονάδα. Στην περίπτωσή μας είναι 3.

δ) Μετακινήστε την υποδιαστολή τις διπλάσιες θέσεις όσες και τα βήματα που χρειάζεται να κάνετε προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Στην περίπτωσή μας θα μετακινήσουμε την υποδιαστολή έξι θέσεις αριστερά. Άρα τα 1500 m^2 είναι 0,001500 km^2.

King
Henry
Doesn't
Mind
Drinking
Cold
Milk

Να το θυμάστε!

13. Αν θέλατε να μετατρέψετε τα 150 m^2 σε cm^2 ποια διαδικασία θα ακολουθούσατε;

....

....

....

....

....

14. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα.

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
253			
	320		
		7122	
			12653

15. Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τα παρακάτω εμβαδά:

α) 3,7 dm^2, 7 cm^2, 4,3 cm^2, 3,7 m^2.

....

....

β) 40 cm^2, 42 mm^2, 40 dm^2, 3 m^2.

....

....

γ) 1453 mm^2, 14,5 cm^2, 1,4 dm^2, 0,14 m^2.

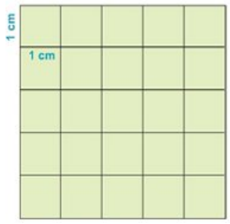
....

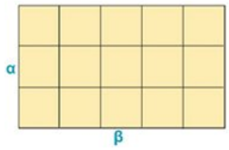
....

Β. 1.3. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

~

Α. Εμβαδόν τετραγώνου και εμβαδόν ορθογωνίου





16. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mp3.ggb](mp3.ggb). Τι παρατηρείτε;

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Β. Εμβαδόν παραλληλογράμμου

17. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mp4.ggb](mp4.ggb). Πώς υπολογίζεται το εμβαδό του παραλληλογράμμου;

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Για να συμβολίσετε το εμβαδόν κάθε επίπεδου σχήματος, το γράφετε μέσα σε παρένθεση. Δηλαδή, το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συμβολίζεται με (ΑΒΓΔ), το εμβαδόν ενός τριγώνου ΖΗΘ συμβολίζεται με (ΖΗΘ) κ.ο.κ.

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α ισούται με $α^2$.

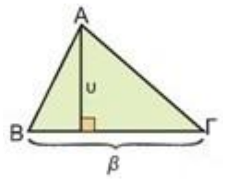
Τις πλευρές ενός ορθογωνίου τις λέμε μήκος (τη μεγαλύτερη πλευρά) και πλάτος (τη μικρότερη) και τις ονομάζουμε διαστάσεις του ορθογωνίου.

Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι:

εμβαδόν ορθογωνίου = μήκος · πλάτος

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές α, β ισούται με α · β.

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

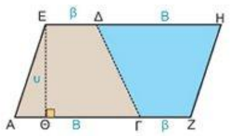


$$E_{\text{τριγώνου}} = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon$$

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του με το ύψος του.



Γ. Εμβαδόν τριγώνου

18. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp5.ggb. Πώς υπολογίζεται το εμβαδό του τριγώνου;

....

....

....

....

....

19. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp5.ggb. Ποιο είναι το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου;

....

....

....

....

Δ. Εμβαδόν τραπεζίου

20. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp6.ggb. Ποιο είναι το εμβαδό του τραπεζίου;

....

....

....

....

21. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:

Μήκος ορθογωνίου	Πλάτος ορθογωνίου	Περίμετρος ορθογωνίου	Εμβαδόν ορθογωνίου
12 m	10 m		
17 m		44m	
	9 m		45 m²
33 m			330 m²

22. Η αίθουσα Φυσικής στο σχολείο της Άννας αποφασίστηκε να στρωθεί με τετράγωνα πλακάκια που το καθένα έχει πλευρά 25 cm.

α) Να βρείτε πόσα πλακάκια θα χρειαστούν, αν το δάπεδο της τάξης έχει διαστάσεις 12 m μήκος και 8 m πλάτος.

β) Αν κάθε πλακάκι κοστίζει 0,5 €, πόσα χρήματα θα χρειαστούν για να στρωθεί η τάξη;

....

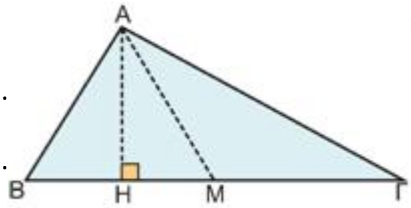
....

....

....

23. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ.

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ έχουν το ίδιο εμβαδόν.



....

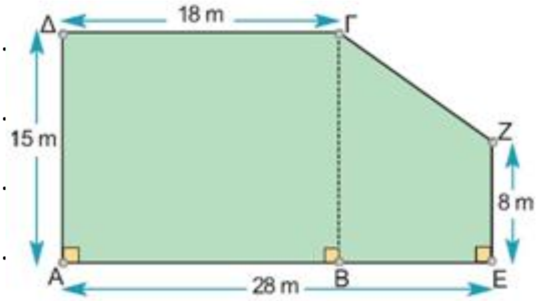
....

....

....

24. Ένα οικόπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, πωλείται προς 3000 € το m².

Ποια είναι η αξία του οικοπέδου;



....

....

....

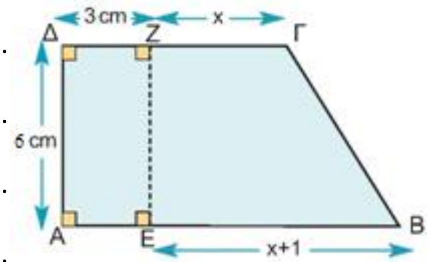
....

....

25. Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x.

β) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι το τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΖΔ, να υπολογίσετε το x.



....

....

....

....

....

....

Β. 1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα

~

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Η σχέση που συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός τριγώνου, εκφράζει το Πυθαγόρειο θεώρημα:

Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

26. Παρακολουθήστε στο http://aesop.iep.edu.gr/node/20435/5121 το βίντεο με τίτλο: *Πρόσωπα και επιστήμες – Πυθαγόρας* και συζητήστε τα δύο ερωτήματα:

α) Πώς θα αξιοποιηθεί η σκάλα;

....

....

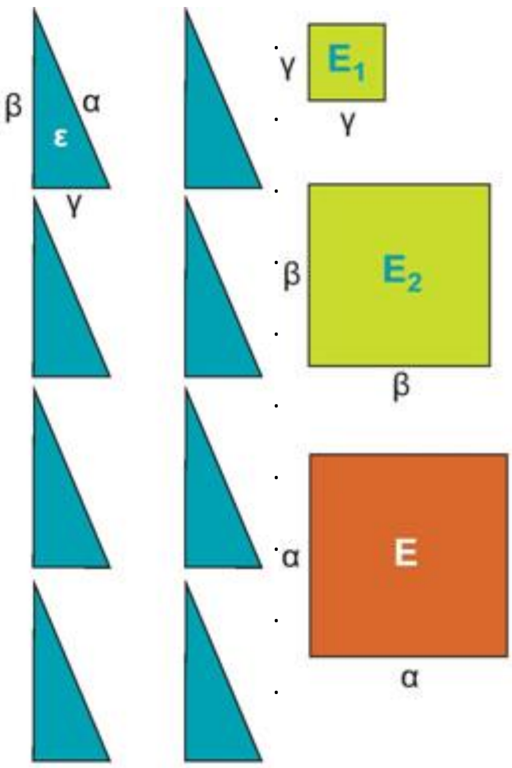
β) Πώς πιστεύετε ότι μπορεί να υπολογιστεί το μήκος της σκάλας;

....

....

27. Δίνονται 8 ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α και τρία τετράγωνα με πλευρές α, β, γ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε, E_1, E_2, Ε των παρακάτω τριγώνων και τετραγώνων.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

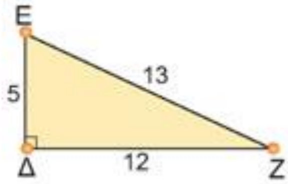
β) Εργαστείτε στο μικροπείραμα: mp7.ggb. Μπορείτε να κατασκευάσετε δύο τετράγωνα με πλευράς β + γ;

γ) Αν ναι ποια σχέση προκύπτει από την ισότητα των εμβαδών τους;

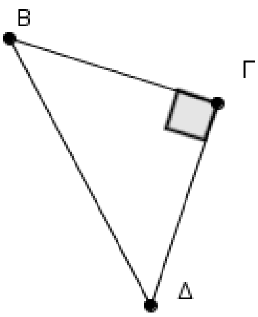
....

....

Να επαληθεύσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο του σχήματος.



28. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα για το ακόλουθο τρίγωνο:

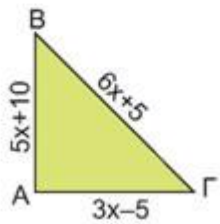


29. Παρακολουθήστε στο http://aesop.iep.edu.gr/node/20435/5121 το διαδραστικό βίντεο με τίτλο: *Παρουσίαση του Πυθαγορείου Θεωρήματος* και συζητήστε τα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

30. Να εργαστείτε στο μικροπείραμα: mp8.ggb.
Τι παρατηρείτε;

31. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 150 m.

α) Να βρείτε τον αριθμό x.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν ένα σκοινί. Το σκοινί έχει 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Μεταγενέστερα, οι αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον ισχυρισμό αυτό αποδεικνύοντας την γενική πρόταση, που είναι γνωστή ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

32. Μία διογκώσιμη κεκλιμένη ράμπα έχει μήκος 8 μέτρα και ύψος 6 μέτρα. Πόσα μέτρα είναι η επιφάνεια της ράμπας;

....

....

....

....

....

33. Οι κατασκευαστές του μικρού πάρκου έχουν καταγράψει ότι αυτό έχει σχήμα ορθογωνίου τριγώνου. Να ελέγξετε αν είναι σωστό.

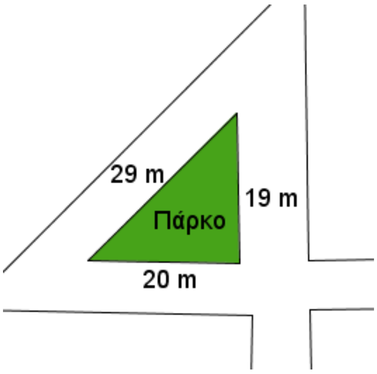
....

....

....

....

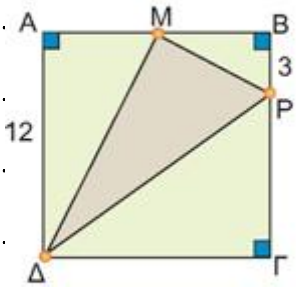
....



34. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 12 cm. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και ΒΡ = 3 cm.

α) Να υπολογίσετε τα $ΜΔ^2$, $ΜΡ^2$ και $ΔΡ^2$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.



....

....

....

....

....

....

....

35. Η πριγκίπισσα Φιόνα είναι κλειδωμένη στον πύργο. Έχετε αποφασίσει να την βοηθήσετε. Εάν α) το παράθυρο του πύργου είναι 40 μέτρα πάνω από το έδαφος, β) χρειάζεται να τοποθετήσετε τη σκάλα σας 9 μέτρα από την βάση του πύργου (λόγω της τάφρου), πόσα μέτρα θα πρέπει να είναι τουλάχιστον η σκάλα σας ώστε να φτάσει το παράθυρο;

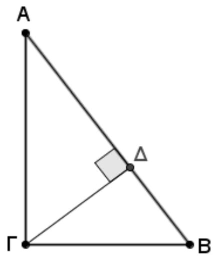
α) 38 μέτρα **β) 40 μέτρα**

γ) 44 μέτρα **δ) 41 μέτρα**

36. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο, το ΓΔ είναι ύψος. Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις

α) $ΓΔ^2 = ΑΓ^2 - ΑΔ^2$ **β)** $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 - ΒΓ^2$

γ) $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2$ **δ)** $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2$



37. Να εργαστείτε στο μικροπείραμα: mp9.ggb. Τι παρατηρείτε;

....

....

....

....

....

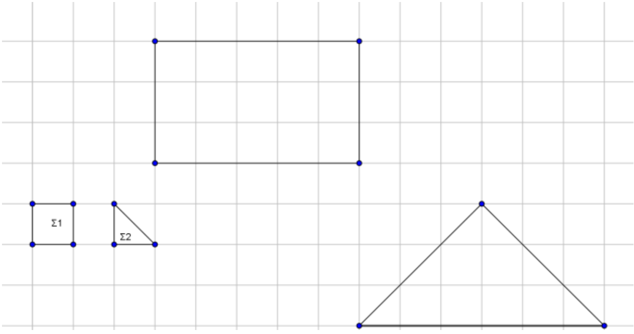
38. Να αντιστοιχίσετε σωστά τις παρακάτω εκφράσεις

1. Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι:	**α)** Ορθή
2. Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι:	**β)** Αμβλεία
3. Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι:	**γ)** Οξεία

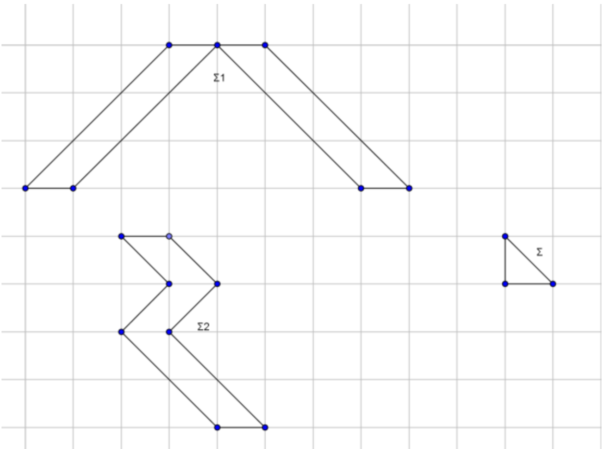
Απάντηση: 1 ………, 2 ………, 3 ………

Ασκήσεις προς λύση
Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

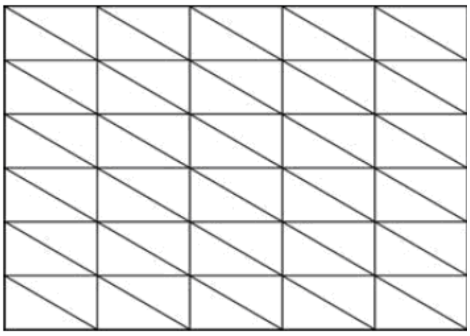
1.1. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων με μονάδα μέτρησης:
α) το σχήμα Σ1
β) το σχήμα Σ2



1.2. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων Σ1 και Σ2 με μονάδα μέτρησης το σχήμα Σ.

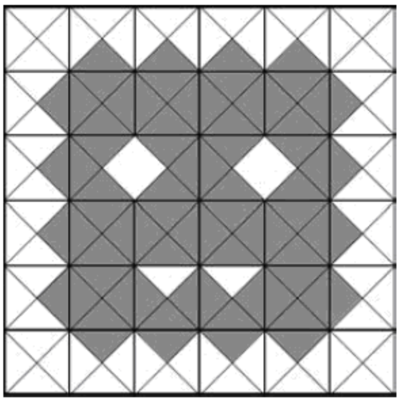


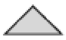
1.3. Η αυλή ενός σπιτιού έχει σχήμα ορθογωνίου και πρόκειται να στρωθεί με τριγωνικά πλακάκια, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Πόσα πλακάκια θα χρειαστούν;
β) Ποιο είναι το εμβαδόν της αυλής με μονάδα μέτρησης το τριγωνικό πλακάκι;
γ) Ποιο θα ήταν το εμβαδόν της αυλής, αν χρησιμοποιούσαμε ως μονάδα μέτρησης ορθογώνια πλακάκια με πλευρές τις κάθετες πλευρές των παραπάνω τριγώνων;

1.4. Ποιο είναι το εμβαδόν του παρακάτω γραμμοσκιασμένου σχήματος;



α) με μονάδα μέτρησης το τρίγωνο  ;

β) με μονάδα μέτρησης το τετράγωνο  ;

Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων

1.5. Αν η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 60 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

1.6. Τραπέζιο έχει εμβαδόν 99 cm^2 και ύψος 6 cm. Να βρείτε τα μήκη των βάσεων του αν η μια είναι 3cm μεγαλύτερη από την άλλη.

1.7. Τετράγωνο είναι ισοδύναμο με ρόμβο. Αν η περίμετρος του τετραγώνου είναι 64cm και η μια διαγώνιος του ρόμβου είναι 20 cm, να βρείτε το μήκος της άλλης διαγωνίου του ρόμβου.

1.8. Ορθογώνιο δάπεδο έχει διαστάσεις 3,25 m και 42,3 dm. Θέλουμε να καλύψουμε το ορθογώνιο δάπεδο με τετραγωνικά πλακάκια πλευράς 15cm.

α) Πόσα πλακάκια θα χρειαστούμε για να καλύψουμε το ορθογώνιο δάπεδο;

β) Το κάθε πλακάκι κοστίζει 0,7ευρώ.Πόσα θα μας κοστίσει η κάλυψη του δαπέδου;

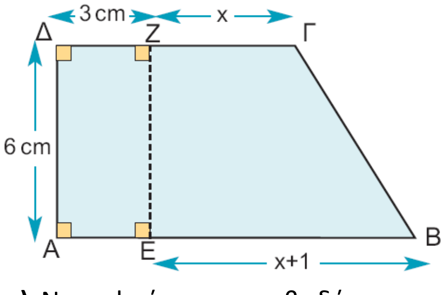
1.9. Ένα παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν 60 cm^2 και περίμετρο 24 cm. Αν η μία πλευρά του είναι 4 cm, να υπολογίσετε τα ύψη του.

1.10. Ένα χωράφι έχει σχήμα ορθογώνιο και το μήκος του είναι διπλάσιο από το πλάτος του.

α) Πόσα στέμματα είναι το εμβαδόν του αν γνωρίζουμε ότι η περίμετρός του είναι 720m.

β) Πόσα χρήματα θα εισπράξει ο ιδιοκτήτης του αν το πουλήσει προς 540€ το στέμμα;

1.11. Στο παρακάτω σχήμα:



α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x.

β) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι το τετραπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΖΔ, να υπολογίσετε το x.

1.12. Το σαλόνι σε ένα σπίτι είναι ορθογώνιο και έχει διαστάσεις 4,5 m και 3 m.Η ιδιοκτήτρια του σπιτιού έστρωσε δύο χαλιά στο σαλόνι, το ένα είχε σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις 2,5 m και 2 m και το δεύτερο σχήμα τετραγώνου με πλευρά 2m.Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ακάλυπτης επιφάνειας.

1.13. Η περίμετρος ενός παραλληλογράμμου είναι 40 cm,η πλευρά του 8 cm και το ύψος που αντιστοιχεί στην άλλη πλευρά είναι 3 cm. Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι κατά 4 cm^2 μεγαλύτερο από το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. Οι βάσεις του τραπεζίου είναι 4cm και 12cm.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

β) Να υπολογίσετε το ύψος του τραπεζίου.

1.14. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β και παίρνουμε τμήμα ΒΕ=2ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ και το τρίγωνο ΒΓΕ έχουν το ίδιο εμβαδόν.

1.15. Ο Κώστας έψαχνε οικόπεδο, για να κτίσει το σπίτι του. Πήγε στον κτηματομεσίτη, ο οποίος του πρότεινε δύο οικόπεδα, ίσης αξίας, στην ίδια περιοχή, για να διαλέξει το ένα. Το πρώτο είχε σχήμα ορθογώνιο με μήκος 32 m και πλάτος 28 m και το άλλο τετράγωνο με πλευρά 30 m. Ποιο από τα δυο διάλεξε ο Κώστας; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

1.16. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ύψος 3 cm και μεγάλη βάση ΓΔ 14 cm.Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι 30 cm^2.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της βάσης ΑΒ.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ.

γ) Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΒΔΜ και ΓΔΜ είναι ίσα.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΜ.

1.17. Πόσο τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν ενός τετραγώνου αν αυξήσουμε τις πλευρές του κατά 15%;

1.18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΓΔ = 18 cm και αντίστοιχο ύψος ΑΕ = 6 cm. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ ώστε ΑΖ = 14 cm.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.

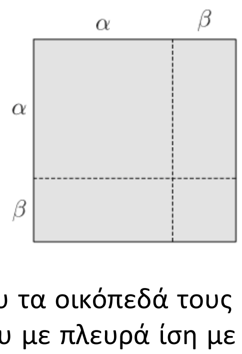
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών του τριγώνου ΑΔΕ και του τραπεζίου ΕΓΒΖ.

γ) Αν δίνεται ότι ΔΕ = 5 cm,να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ και το εμβαδόν του τραπεζίου ΕΓΒΖ.

1.19. Αποδείξτε την ισότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ με δύο τρόπους:

α) Πολλαπλασιάζοντας τις παρενθέσεις $(\alpha+\beta)$ και $(\alpha+\beta)$

β) Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα:



1.20. Για να μην τσακώνονται δύο γείτονες που τα οικόπεδά τους συνόρευαν αποφάσισε ο ένας να περιφράξει το οικόπεδό του που έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά ίση με 50 m. Έβαλε ολόγυρα πασσάλους σε απόσταση 5 m τον ένα από τον άλλο.

α) Πόσους πασσάλους χρειάστηκε;

β) Αν ο κάθε πάσσαλος κοστίζει 10 €,πόσο του κόστισε η αγορά των πασσάλων;

γ) Το κάθε μέτρο περίφραξης κοστίζει 15 €. Πόσο κόστισε συνολικά η περίφραξη μαζί με τους πασσάλους;

1.21. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{B}=\hat{\Gamma}=90^\circ$ με μικρή βάση ΑΒ = 2 cm και μεγάλη βάση ΓΔ = 11 cm. Θεωρούμε σημεία Ζ και Ε στην πλευρά ΒΓ ώστε να είναι ΒΖ = 3 cm, ΖΕ = 4 cm και ΕΓ = 5 cm.
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΖΕΔ.

1.22. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}>90^\circ$) με ΑΒ = 4,8 cm, ΑΓ = 3 cm και ύψος ΒΖ = 4 cm.
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΕ.

Πυθαγόρειο Θεώρημα

1.23. Αν α, β, γ είναι οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου με α την μεγαλύτερη πλευρά του. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

	Πλευρά α	Πλευρά β	Πλευρά γ	α^2	$\beta^2+\gamma^2$	Είναι ορθογώνιο το τρίγωνο;
Τρίγωνο Α	10	8	6			
Τρίγωνο Β	7	6	5			
Τρίγωνο Γ	13	5	12			
Τρίγωνο Δ	12	11	4			

1.24. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 5 cm και βάση ΒΓ = 6 cm.Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

1.25. Έστω ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 10 cm.Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

1.26. Η περίμετρος ενός ρόμβου είναι 20 cm και η μια διαγώνιος του 8 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

1.27. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο ορθογωνίου που έχει διαγώνιο 13 cm και πλάτος 5 cm.

1.28. Ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 10 cm και μια κάθετη πλευρά 8cm. Να υπολογίσετε:
α) το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς
β) το εμβαδόν του τριγώνου και το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του.

1.29. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο η μεγάλη βάση του είναι 20 cm, οι δύο μη παράλληλες πλευρές είναι 5cm και η περίμετρός του είναι 44cm.Να υπολογίσετε:
α) το ύψος του τραπεζίου
β) το εμβαδόν του τραπεζίου.

1.30. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, όπου ΑΔ ύψος και έχουμε ότι ΑΒ = 17 cm, ΑΓ = 10 cm, ΓΔ = 6 cm. Να υπολογίσετε:
α) το μήκος της πλευράς ΒΓ.
β) την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.
γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

1.31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό 480 cm^2.Το ύψος ΑΔ του τριγώνου είναι 24cm και το τμήμα ΔΓ είναι 12cm.Να υπολογίσετε:
α) Το τμήμα ΒΔ.
β) Την πλευρά του ΑΒ.
γ) Το ύψος του ΓΜ.

1.32. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με περίμετρο 22cm. Αν ΑΒ = 2x + 1, ΑΓ = 15 - 2x και ΒΓ = 4x - 10.

α) Να υπολογίσετε το x.

β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

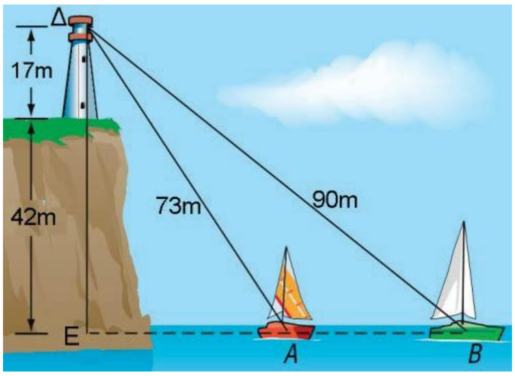
1.33. **α)** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές που έχουν μήκη 3,4,5.Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Διπλασιάστε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

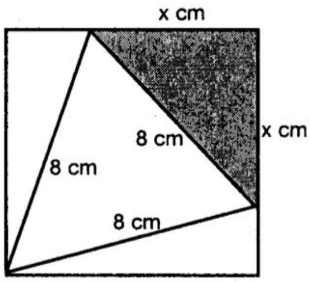
γ) Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α, β, γ. Το τρίγωνο με μήκη πλευρών λα, λβ, λγ (λ φυσικός αριθμός) είναι ορθογώνιο;

1.34. Ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ έχει εμβαδόν 19 cm^2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα του τριγώνου.

1.35. Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση ακεραίου την απόσταση που έχουν μεταξύ τους οι δύο βάρκες του σχήματος που βρίσκονται στις θέσεις Α και Β.



1.36. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 8cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τετράγωνο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ποιο το πηλίκο του εμβαδού του τριγώνου προς το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής; (Από το ημερολόγιο της NCTM)



1.37. Σ' ένα ρόμβο πλευράς 10cm το μήκος της μιας διαγωνίου του είναι 16cm.Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της άλλης διαγωνίου του.

β) το εμβαδόν του ρόμβου.

1.38. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^\circ$ και ΓΔ = 7 cm,ΑΒ = 17 cm, ΑΓ = 25 cm.Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς ΒΓ

β) την περίμετρο του τραπεζίου

γ) το εμβαδόν του τραπεζίου

Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Κεφάλαιο 2, Πραγματικοί αριθμοί

Α. 2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

~

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Επειδή, $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$.

Στον ορισμό υπάρχουν δύο απαιτήσεις:
i) το υπόρριζο είναι μη αρνητική ποσότητα δηλ. $\alpha \geq 0$
ii) το αποτέλεσμα της ρίζας είναι μη αρνητική ποσότητα δηλαδή $\sqrt{\alpha} \geq 0$.

Για να βρούμε αυτούς τους αριθμούς, χρειάζεται να βρούμε ένα θετικό αριθμό του οποίου το τετράγωνο να ισούται με 25.

39. Σύμφωνα με τα Guinness World Records, κάποιος αρτοποιός στην Γερμανία με την βοήθεια ομάδας εθελοντών έφτιαξε το μεγαλύτερο τοστ στον κόσμο με τετράγωνο ψωμί, το οποίο είχε εμβαδό επιφάνειας 289 m^2.

Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος x κάθε πλευράς του τετράγωνου ψωμιού;

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

40. Να γράψετε τι σχέση έχει η τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα με το εμβαδό. Πώς ονομάζεται και πώς συμβολίζεται αυτή η τιμή σε σχέση με το εμβαδό;

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

41. Να βρείτε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{25}$ ………………………………………………………………………

β) $\sqrt{49}$ ………………………………………………………………………

γ) $\sqrt{64}$ ………………………………………………………………………

δ) $\sqrt{121}$ ………………………………………………………………………

42. Να βρείτε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ………………………………………………………………………

β) $\sqrt{0,64}$ ………………………………………………………………………

γ) $\sqrt{17,64}$ ………………………………………………………………………

δ) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ………………………………………………………………………

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός. Για παράδειγμα η $\sqrt{-25}$ δεν έχει νόημα, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα -25.

Αν $\sqrt{\alpha}$ = x, όπου α ≥ 0, τότε x ≥ 0 και x^2 = α.

Αν α ≥ 0, τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2$ = α

Αν x^2 = α τότε
$x = +\sqrt{\alpha}$ ή $x = -\sqrt{\alpha}$

43. Να εξηγήσετε γιατί είναι λάθος να γράψετε:

α) $\sqrt{64}$ = -8 ....

....

β) $\sqrt{(-8)^2}$ = -8 ....

....

44. Να εξετάσετε αν είναι σωστό να γράψουμε ότι $\sqrt{(-5)^2}$.

....

....

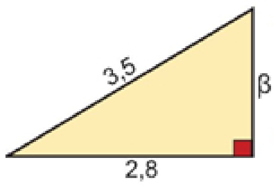
45. Να υπολογίσετε τις ακόλουθες τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{16}$ = ...

β) $\sqrt{0,16}$ = ...

γ) $\sqrt{0,0016}$ = ...

46. Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου του διπλανού σχήματος.



....

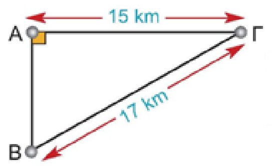
....

....

....

....

47. Πόσο απέχει η πόλη Α από την πόλη Β;



....

....

....

....

....

48. Να λύσετε την εξίσωση x^2 = 16.

....

....

....

....

....

....

....

Για α ≥ 0 και β ≥ 0, ισχύει:
$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ = ...

49. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{36}$ = ...

β) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$ = ...

γ) $\sqrt{4\cdot 9}$ = ...

δ) $\sqrt{2025}$ = ...

ε) $\sqrt{225}\cdot\sqrt{9}$ = ...

στ) $\sqrt{225\cdot 9}$ = ...

Τι παρατηρείτε;

....

....

....

Για α ≥ 0 και β > 0, ισχύει:
$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ = ...

50. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{\frac{2025}{25}}$ = ...

β) $\frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{25}}$ = ...

Τι παρατηρείτε;

....

....

....

51. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{36}+\sqrt{64}$ = ...

β) $\sqrt{36+64}$ = ...

Τι παρατηρείτε;

....

....

....

52. Να εξετάσετε πότε ισχύει $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}$.

....

....

....

....

....

53. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}-\sqrt{21-\sqrt{22+\sqrt{9}}}=$

....

....

....

....

....

β) $\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{144}}-\sqrt{\sqrt{81}}=$

....

....

....

....

....

Α. 2.2. Άρρητοι αριθμοί-Πραγματικοί αριθμοί

~

Οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι δεν υπάρχει ρητός $\frac{\mu}{\nu}$ τέτοιος ώστε $x = \frac{\mu}{\nu}$.

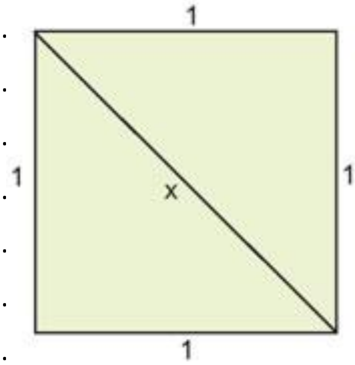
Ο x δε μπορεί να είναι ούτε δεκαδικός ούτε περιοδικός δεκαδικός.
Γενικά:

Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος αριθμός.**

Τις τετραγωνικές ρίζες μπορείτε να τις προσεγγίσε-τε με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης ως εξής:
Για να προσεγγίσετε τον αριθμό $\sqrt{2}$, πατάτε διαδοχικ 2 πλήκτρα και και √, οπότε στην οθόνη βλέπετε τον αριθμό 1,414213 που είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$, με έξι δεκαδικά ψηφία.

Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των ριζών χρησιμοποιούσαν ειδικούς πίνακες.

54. Δίνεται το τετράγωνο που φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε την διαγώνιο του τετραγώνου.



……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

55. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp10.ggb για να διερευνήσετε τον τρόπο υπολογισμού του x. Καταγράψτε τα βήματα.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

56. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp11.ggb για τον τρόπο κατασκευής της τετραγωνικής ρίζας αριθμού. Καταγράψτε τα βήματα που απαιτούνται για να κατασκευαστεί η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Πραγματικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί είναι οι 0, 1, 2, 3, …

Οι ακέραιοι αριθμοί είναι οι … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 …

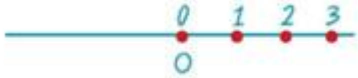
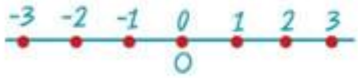
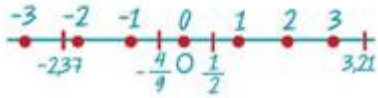
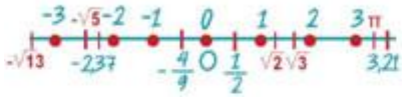
Οι ρητοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{μ}{ν}$ όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός. Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους.

Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας.

Η ευθεία αυτή την ονομάζεται **ευθεία ή άξονας των πραγματικών αριθμών**.

57. Δίνονται οι ακόλουθες ευθείες αριθμών. Να αντιστοιχίσετε την ευθεία με το σύνολο των αριθμών που αναπαριστά.

Ευθεία αριθμών	Σύνολο
(i) 	**(α)** των ρητών αριθμών
(ii) 	**(β)** των φυσικών αριθμών
(iii) 	**(γ)** των πραγματικών αριθμών
(iv) 	**(δ)** των ακεραίων αριθμών

58. Ποια διαφορά υπάρχει μεταξύ της ευθείας των φυσικών αριθμών και της ευθείας των ακέραιων αριθμών;

………

………

59. Ποια διαφορά υπάρχει μεταξύ της ευθείας των ακέραιων αριθμών και της ευθείας των ρητών αριθμών;

………

………

60. Ποια διαφορά υπάρχει μεταξύ της ευθείας των ρητών αριθμών και του άξονα των πραγματικών αριθμών;

………

………

61. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{13}$ έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

………

………

………

………

………

Γράφετε όλους τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή χρησιμοποιώντας τις ρητές προσεγγίσεις δύο ψηφίων για τους άρρητους.

62. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:

$-4,\quad -2{,}38,\quad \frac{4}{9},\quad -\sqrt{13},\quad 4{,}13,\quad 3{,}6,\quad \frac{1}{\sqrt{5}},\quad 1,\quad 2.$

63. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp12.ggb.

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή δεκαδικού ή περιοδικού δεκαδικού αριθμού.
Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος αριθμός.**

64. Ερωτήματα

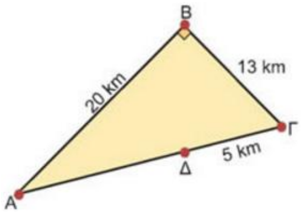
α) Ποιος είναι ο μικρότερος θετικός πραγματικός;
β) Ποιος είναι ο «επόμενος» πραγματικός του 1;
γ) Μπορείτε πάντα να βρείτε έναν ρητό/άρρητο ανάμεσα σε δύο άλλους;
δ) Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος; Το 1,33333333... ή το 1,34;
ε) Βρείτε μερικούς αριθμούς μεταξύ του 1,33333... και του 1,34.
στ) Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος; Το 3,99999999... ή το 4;
ζ) Καταγράψτε μερικούς άρρητους αριθμούς.

Α. 2.3. Προβλήματα

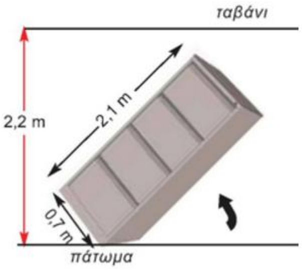
∼

65. Πρόβλημα 1. Κατά τη μετακίνηση από την πόλη Α στην πόλη Β, μετά στο χωριό Γ και από το χωριό Γ στο χωριό Δ, ο μετρητής του αυτοκινήτου κατέγραψε τις αποστάσεις ΑΒ = 20 km, ΒΓ = 13 km και ΓΔ = 5 km.

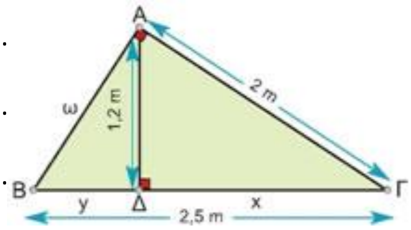
Ποια είναι η απόσταση από το χωριό Δ στην πόλη Α;



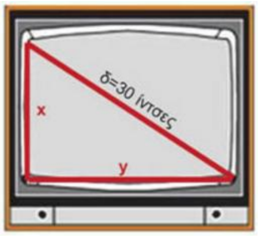
66. Πρόβλημα 2. Μπορείτε να σηκώσετε όρθιο το ντουλάπι του σχήματος; Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mp13.ggb](mp13.ggb).



67. Πρόβλημα 3. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη x, y και ω.



68. Πρόβλημα 4. Η διαγώνιος της οθόνης της τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x, y έχουν λόγο $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης.



Ασκήσεις προς λύση
Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

1.39. Αν x > 0, να βρείτε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι σωστές.

α) $\sqrt{x^2}=x$

β) $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$

γ) $\sqrt{(-x)^2}=-x$

δ) $\sqrt{(-x)^2}=|-x|$

1.40. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{36}$, $\sqrt{1,21}$, $\sqrt{4900}$

β) $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{4}{81}}$, $\sqrt{225}$

γ) $\sqrt{\frac{196}{100}}$, $\sqrt{\frac{529}{676}}$, $\sqrt{144}$

δ) $\sqrt{\frac{0,09}{0,16}}$, $\sqrt{\frac{1,69}{2,89}}$, $\sqrt{\frac{0,004}{0,225}}$

1.41. Αν είναι α < 0, ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές και γιατί;

α) $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

β) $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$

γ) $\sqrt{\alpha^2}=-\alpha$

δ) $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$

1.42. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\sqrt{14^2}$

β) $\sqrt{(-10)^2}$

γ) $\sqrt{27\cdot 27}$

δ) $\sqrt{(-4)^2}+\sqrt{(-5)^2}$

ε) $\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{2^2}$

1.43. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	y	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$	$\sqrt{x\cdot y}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	$\sqrt{x+y}$
25	4								
9	49								
10	36								

α) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ και $\sqrt{x\cdot y}$. Τι παρατηρείτε;

β) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{\frac{x}{y}}$ και $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. Τι παρατηρείτε;

γ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ και $\sqrt{x+y}$. Τι παρατηρείτε;
Να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας.

1.44. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $7\sqrt{11}-\sqrt{5}-2\sqrt{11}+4\sqrt{5}$

β) $\sqrt{7}\left(2\sqrt{7}-1\right)$

γ) $\left(\sqrt{2}-3\right)\left(1-2\sqrt{2}\right)$

δ) $\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)$

1.45. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2\sqrt{63}-3\sqrt{2}-\sqrt{28}+\sqrt{18}$

β) $\dfrac{3\sqrt{8}-2\sqrt{18}-5\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

γ) $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{75}-4\sqrt{3}}$

1.46. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left|\sqrt{63}-\sqrt{28}\right|-\left|1-\sqrt{7}\right|-1=0$

β) $\sqrt{32}-5\sqrt{18}+7\sqrt{8}-2\sqrt{50}=-7\sqrt{2}$

γ) $5\sqrt{7}-\dfrac{6}{5}\sqrt{175}-\dfrac{7}{2}\sqrt{28}+\dfrac{8}{3}\sqrt{63}=0$

δ) $2\left|\sqrt{18}+\sqrt{9}\right|-\left|\sqrt{8}-\sqrt{16}\right|-2=8\sqrt{2}$

1.47. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

β) $\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{9}}}$

γ) $\sqrt{13-\sqrt{21-\sqrt{29-\sqrt{16}}}}$

δ) $\sqrt{2+\sqrt{45+\sqrt{22-\sqrt{36}}}}$

1.48. Αν $-2\le x\le 2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\sqrt{\left(x+2\right)^2}+\sqrt{\left(2-x\right)^2}$

β) $B=\sqrt{\left(x-4\right)^2}-\sqrt{\left(3-x\right)^2}$

1.49. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{16x^2y^4}$ αν x, y > 0

β) $\sqrt{49x^8y^2z^6}$ αν x, y, z > 0

γ) $\sqrt{16x^2y^4}$

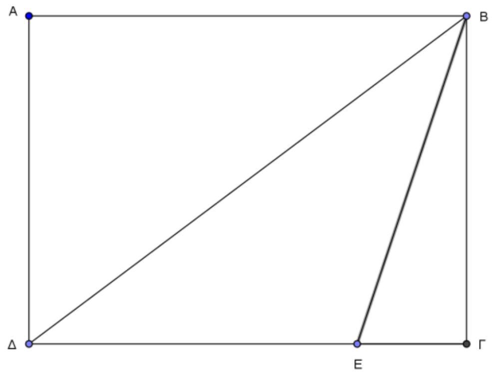
δ) $\sqrt{49x^8y^2z^6}$

1.50. **α)** Αν x = 9,να τοποθετήσετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $x, x^2, \sqrt{x}$.

β) Αν $x=\dfrac{1}{4}$ να τοποθετήσετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $x, x^2, \sqrt{x}$.

γ) Ποιο είναι το συμπέρασμα από τα αποτελέσματα των παραπάνω περιπτώσεων;

1.51. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 8,ΒΔ = 10 και σημείο Ε στην ΓΔ ώστε ΕΓ = 2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΕΔ.



1.52. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με μικρή βάση ΑΒ = 10, μη παράλληλες πλευρές ΒΓ = ΑΔ = 5 και ύψος 3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

1.53. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη x - 2, x, x + 2. Αν το x ικανοποιεί τη σχέση $(x-1)(x+3)=x^2+13$

α) Να υπολογίσετε το x.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

1.54. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{4-\sqrt{11-\sqrt{4}}}$, $\beta=\sqrt{-3+\sqrt{54-\sqrt{25}}}$, $\gamma=\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}$.

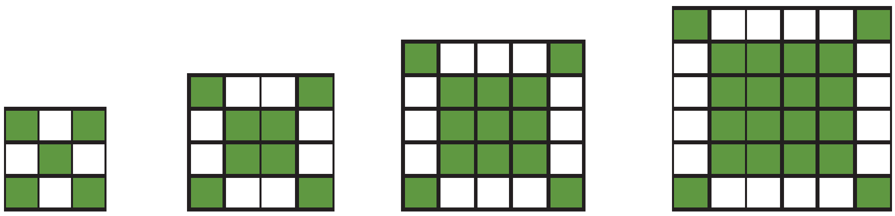
α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β, γ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές τους αριθμούς α, β, γ είναι ορθογώνιο.

γ) Να φέρετε το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και να το υπολογίσετε.

1.55. Να υπολογίσετε την τιμή του α, όπου α > 8, έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω ισότητα: $\sqrt{\alpha-\sqrt{74-\sqrt{85+\sqrt{225}}}}=5$

1.56. Να βρείτε τον αριθμό των σκιασμένων τετραγώνων σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα του μοτίβου:



Ποιο σχήμα θα έχει 200 σκιασμένα τετράγωνα;

1.57. Για να εκτιμήσει η αστυνομία την ταχύτητα (km/h) ενός τύπου οχήματος τη στιγμή που πατά τα φρένα ο οδηγός, χρησιμοποιεί τον τύπο $u=9\sqrt{\dfrac{d}{0,16}}$,όπου d το μήκος(m) του αποτυπώματος των λαστίχων στην άσφαλτο.

α) Να εκτιμήσετε την ταχύτητα ενός αυτοκινήτου του οποίου τα λάστιχα άφησαν αποτυπώματα μήκους: 4 m, 12 m, 16 m.

β) Ένας αστυνομικός για να υπολογίζει πιο γρήγορα την ταχύτητα έχει μετασχηματίσει τον τύπο ως εξής: $u=\dfrac{9\sqrt{d}}{0,4}$. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού του.

Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

1.58. Να βρείτε το σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών που παριστάνει τον αριθμό $\sqrt{34}$.

1.59. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις ως και δύο δεκαδικά ψηφία των αριθμών:
α) $\sqrt{6}$
β) $\sqrt{13}$

1.60. Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:
α) $\sqrt{8},1,\sqrt{3},\sqrt{10}$
β) $\sqrt{11},6,\sqrt{17},\sqrt{21},10$
γ) $1+\sqrt{3},3,\sqrt{3},\sqrt{3}-1,2+\sqrt{3}$
δ) $\sqrt{3}+\sqrt{2},\sqrt{5}$
ε) $\sqrt{5},\sqrt{2+\sqrt{5}}$

1.61. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2=6$
β) $x^2=-2$
γ) $x^2=1$
δ) $x^2=11$

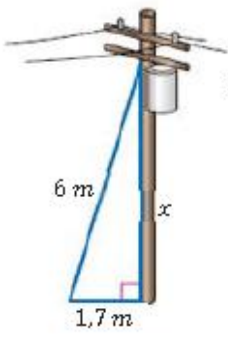
1.62. Να βρείτε δύο αριθμούς x και y,έτσι ώστε να ισχύει: $5<\sqrt{x}<\sqrt{y}<6$.

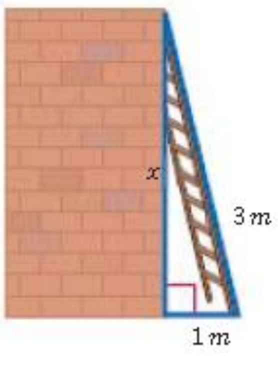
1.63. Να εξετάσετε σε ποια σύνολα αριθμών ανήκει καθένας από τους παρακάτω αριθμούς συμπληρώνοντας τις κατάλληλες στήλες:

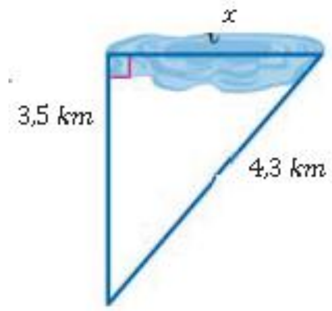
Αριθμός	Φυσικός	Ακέραιος	Ρητός	Άρρητος	Πραγματικός
15					
$\frac{2}{5}$					
$-\sqrt{5}$					
$\sqrt{100}$					
$4,\overline{15}$					
0,7777					
π					
-12					

Προβλήματα στους άρρητους αριθμούς

1.64. Να υπολογίσετε το μήκος x στις παρακάτω περιπτώσεις (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου):

α)


β)


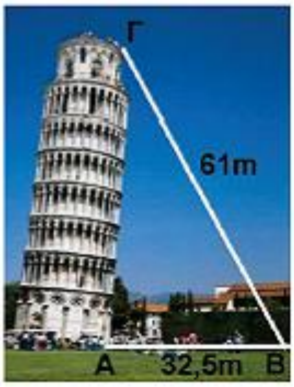
γ)


1.65. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν ΑΒ = 12 cm, ΒΓ = 15 cm,να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν του τριγώνου.
β) το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

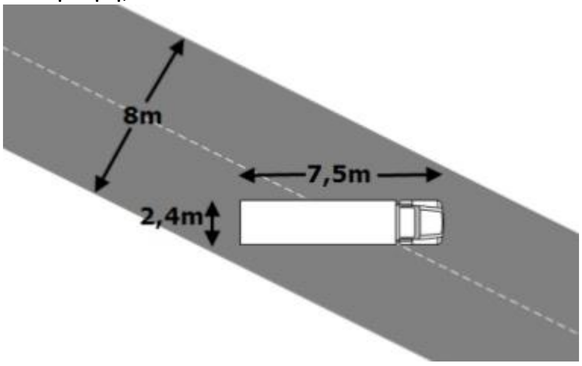
1.66. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό 400 cm^2. Το ύψος ΑΔ του τριγώνου είναι 25 cm και το τμήμα ΓΔ είναι 15 cm. Να υπολογίσετε:
α) το τμήμα ΒΔ
β) την πλευρά του ΑΒ
γ) το ύψος του ΓΜ.

1.67. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 5 cm και ΒΓ = 6 cm.Να υπολογίσετε:
α) το ύψος ΑΔ του τριγώνου.
β) το εμβαδόν του τριγώνου.
γ) το ύψος ΓΖ.

1.68. Να αποδείξετε ότι ο πύργος της Πίζας που έχει ύψος 55 m,δεν είναι τοποθετημένος σε όρθια θέση (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου).

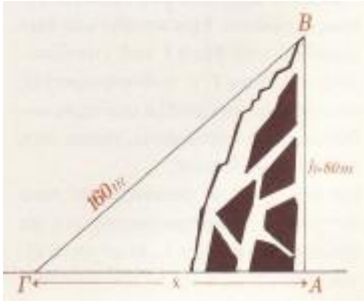


1.69. Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες του δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8 m.Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογωνίου με μήκος 7,5 m και πλάτος 2,4 m.Είναι δυνατόν ο οδηγός του να εκτελέσει ελιγμούς, ώστε το φορτηγό να κάνει αναστροφή;



1.70. Στην παρακάτω φωτογραφία φαίνεται η γέφυρα που ενώνει το Ρίο με το Αντίρριο. Η γέφυρα στηρίζεται σε 5 πυλώνες. Από την κορυφή κάθε πυλώνα ξεκινούν καλώδια που καταλήγουν στο κατάστρωμα της γέφυρας. Αν το ύψος του πυλώνα ΑΒ είναι 100 m και το μεγάλο καλώδιο ΑΓ καταλήγει σε απόσταση 280 m από τη βάση του πυλώνα, να υπολογίσετε το μήκος ΑΓ του καλωδίου (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου).

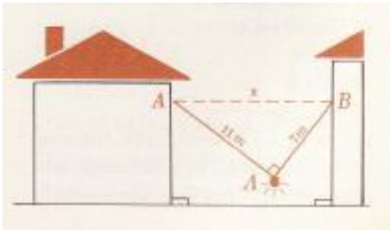
1.71. Ένας στρατιώτης των Ειδικών Δυνάμεων κατεβαίνει από ύψος h = 80 m πάνω στο τεντωμένο συρματόσχοινο. Το μήκος της διαδρομής είναι 160 m.



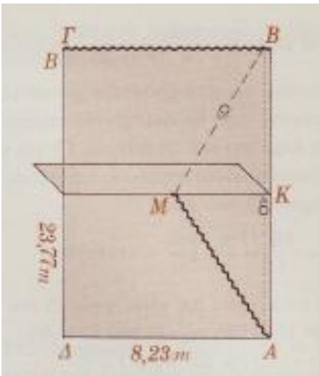
α) Να υπολογίσετε το μήκος ΑΓ.

β) Να βρείτε την κλίση του συρματόσχοινου.

1.72. Μια λάμπα κρέμεται με τη βοήθεια δύο συρματόσχοινων ΑΛ και ΒΛ αντίστοιχα 11 m και 7 m. Η γωνία που σχηματίζουν είναι $\hat{A\Lambda B} = 90^\circ$. Να υπολογίσετε το πλάτος του δρόμου x με προσέγγιση εκατοστού.



1.73. Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει ένα γήπεδο τένις με διαστάσεις 8,23 m πλάτος και 23,77 m μήκος. Σε μια χρονική στιγμή οι παίκτες βρίσκονται στις θέσεις Μ και Γ.



α) Αν το μπαλάκι που έχει αποκρουσθεί από τον παίκτη του σημείου Μ κατευθύνεται προς το σημείο Β με ταχύτητα 20 m/s, με ποια ελάχιστη ταχύτητα πρέπει να φύγει ο παίκτης του σημείου Γ για να προλάβει να αποκρούσει το μπαλάκι στο σημείο Β;

β) Αν τελικά ο παίκτης του σημείου Γ κάνει την απόκρουση στο σημείο Β και το μπαλάκι κατευθύνεται προς το σημείο Α με την προηγούμενη ταχύτητα με ποια ελάχιστη ταχύτητα πρέπει να φύγει ο παίκτης του σημείου Μ προς το Α ώστε μόλις να αποκρούσει;

(Οι ασκήσεις 1.71, 1.72 και 1.73 προέρχονται από το βιβλίο: Αλεξίου, Κ.Τ., Αμπλιανίτου, Γ., Καββαδίας, Κ. (1990). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*, Βιβλιοεκδοτική Αναστασάκη, Αθήνα.)

Παράρτημα