Περιοδική έκδοση για τα Μαθηματικά Γυμνασίου

https://mathsgymnasio.wordpress.com/

Τεύχος 6

Περιεχόμενα

Δημιουργοί: Δουκάκης Σπυρίδων & Σαράφης Ιωάννης

Συγγραφική συμβολή: Γκαρμπολάς Κωνσταντίνος & Πρωτοπαπάς Δημήτριος

Κριτική ανάγνωση: Δημητρουλάκη Εμμανουέλλα, Ζαχαρίας Ιωάννης, Κάντα Σπυριδούλα & Μιχαλοπούλου Γεωργία

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2015

Έκδοση 1.0

ISSN: 2241-9381

Πρόλογος

Με το έκτο τεύχος της περιοδικής έκδοσης για τα Μαθηματικά Γυμνασίου ξεκινά η προσέγγιση της ύλης των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου. Στο τρέχον τεύχος περιλαμβάνεται διδακτικό υλικό για τις δύο παραγράφους του 7ου κεφαλαίου της Α΄ Γυμνασίου «Δυνάμεις ρητών με εκθέτη φυσικό» και «Δυνάμεις ρητών με εκθέτη ακέραιο» και το 1ο κεφάλαιο του Μέρους Α της Β΄ Γυμνασίου «Εξισώσεις - Ανισώσεις». Το υλικό μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο στο πλαίσιο της σχολικής τάξης, όσο και στο σπίτι από τον ίδιο τον μαθητή και την μαθήτρια.

Το υλικό περιλαμβάνει φύλλα εργασίας τα οποία είναι δομημένα σε μορφή δίστηλου. Τα φύλλα εργασίας περιλαμβάνουν στην αριστερή στήλη και μέσα σε κατάλληλα πλαίσια θεωρία, χρήσιμες πληροφορίες, ιστορικά σημειώματα κ.α., τα οποία χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένα εικονίδια[1] για να μπορεί ο μαθητής και η μαθήτρια να διακρίνει το στόχο τους. Στο κύριο μέρος του φύλλου εργασίας ο μαθητής καλείται να εργαστεί ατομικά ή συνεργατικά για να οικοδομήσει τις γνώσεις τους, μέσα σε ένα πλαίσιο σκαλωσιάς μάθησης, βάσει του ισχύοντος προγράμματος σπουδών, των οδηγιών διδασκαλίας, του υλικού του σχολικού βιβλίου και του υλικού του βιβλίου εκπαιδευτικού. Το υλικό συνοδεύεται από επιλεγμένα μικροπειράματα[2] που προέρχονται από το ψηφιακό σχολείο, από άλλες πηγές ή έχουν αναπτυχθεί από τους συγγραφείς. Κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ασκήσεις, που καλείται να λύσει ο μαθητής. Οι ασκήσεις έχουν αναπτυχθεί με γνώμονα τις ανάγκες της σχολικής τάξης και την εμβάθυνση των μαθητών στις μαθηματικές έννοιες.

Τα φύλλα εργασίας και οι ασκήσεις αποτελούν μία οργανωμένη συγκέντρωση των υπαρχουσών πηγών υλικού και στοχεύουν στην υποστήριξη της μάθησης των μαθητών και στην ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης, μέσα από ένα πλούσιο σε πηγές πλαίσιο. Για το λόγο αυτό το υλικό προσφέρεται με άδεια Creative Commons, ώστε να είναι διαθέσιμο και «ανοικτό» σε όλη την εκπαιδευτική μαθηματική κοινότητα.

Το υλικό έχει δομηθεί με την υποστήριξη ομάδας εκπαιδευτικών , έχει δουλευτεί στις τάξεις, έχει αξιοποιηθεί από δεκάδες μαθητές και μαθήτριες και από αρκετούς εκπαιδευτικούς. Ευχαριστούμε για τη βοήθεια όλους τους συναδέλφους που μας στηρίζουν σε αυτή την προσπάθεια.

Το Τεύχος 6 περιέχει υλικό για τα ακόλουθα:

- **Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Κεφάλαιο 7, Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί, Α.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό, Α.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο**
- **Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Κεφάλαιο 1, Εξισώσεις - Ανισώσεις**

Καλή μελέτη!

Σπυρίδων Δουκάκης & Ιωάννης Σαράφης
mathsgymnasio@gmail.com

[1] Τα εικονίδια προέρχονται από το βιβλίο: Βακάλη Α., Γιαννόπουλος Η., Ιωαννίδης Ν., Κοίλιας Χ., Μάλαμας Κ., Μανωλόπουλος Ι., Πολίτης Π. (1999), *Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον*, ΙΤΥΕ, Διόφαντος.

[2] Τα μικροπειράματα προέρχονται από το Ψηφιακό σχολείο (dschool.edu.gr) και έχουν αναπτυχθεί από την ομάδα του Εργαστήριου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας με συντονιστή τον Καθ. Κυνηγό Χρόνη.

Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Άλγεβρα,
Κεφάλαιο 7, Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί,
Α.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό,
Α.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Μέρος Α΄ Κεφάλαιο 7ο Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

Α.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

~

1. Γιατί υπάρχει η ανάγκη εισαγωγής των δυνάμεων;

....

....

2. Δραστηριότητα.

Μία εταιρεία με σκοπό την προώθηση ενός νέου προϊόντος στέλνει ένα μήνυμα σε έναν πελάτη. Στις 8.50΄ ο πελάτης προωθεί το μήνυμα σε τρεις φίλους του. Στα επόμενα 10 λεπτά ο καθένας από τους τρεις φίλους προωθεί το μήνυμα σε άλλους τρεις, αυτοί επαναλαμβάνουν το ίδιο το επόμενο δεκάλεπτο και ούτω καθεξής.

Σε κάθε επόμενο στάδιο μετά τις 8.50΄ πόσα άτομα λαμβάνουν το μήνυμα;

Πόσα άτομα έχουν λάβει το μήνυμα στις 10.00΄;

....

....

....

....

....

3. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ ....

β) $(+2)^5 =$ ....

γ) $(-2)^4 =$ ....

δ) $(-2)^5 =$ ....

ε) $(+2)^4 =$ ....

Πότε το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικό;

....

....

Γιατί το αποτέλεσμα της δύναμης είναι αρνητικό στην παραπάνω περίπτωση;

....

....

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

α) -3^3	**β)** $(-3)^3$	**γ)** -3^4	**δ)** $(-3)^4$
ε) -6^2	**στ)** $(-6)^2$	**ζ)** -1^4	**η)** $(-1)^4$
θ) $(-2)^3$	**ι)** -2^4	**ια)** $(-2)^4$	**ιβ)** -2^3

Το **γινόμενο** $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$, συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ και λέγεται **δύναμη με βάση το α** και **εκθέτη το φυσικό ν > 1**.

Για **ν = 1**, γράφουμε $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$.

Η **δύναμη** $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ διαβάζεται και **νιοστή δύναμη του α**.

Η **δύναμη** $\boldsymbol{\alpha^2}$ λέγεται και **τετράγωνο του α** ή **α στο τετράγωνο**.

Η **δύναμη** $\boldsymbol{\alpha^3}$ λέγεται **κύβος του α** ή **α στον κύβο**.

- Αν η **βάση θετική**, τότε η **δύναμη θετική**.
  Αν **α > 0**, τότε $\boldsymbol{\alpha^\nu > 0}$
- Αν η **βάση αρνητική** τότε
  - Αν ο **εκθέτης άρτιος** (ζυγός) τότε η **δύναμη είναι θετική**.
    Αν **α < 0** και **ν άρτιος**, τότε $\boldsymbol{\alpha^\nu > 0}$
  - Αν ο **εκθέτης περιττός** (μονός) τότε η **δύναμη είναι αρνητική**.
    Αν **α < 0** και **ν περιττός**, τότε $\boldsymbol{\alpha^\nu < 0}$

Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$$

Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$$

5. Να εκτελέσετε τις πράξεις (αναλυτικά στις παραστάσεις α και β).

α) $2^3 \cdot 2^5$ = ...

β) $(-7)^3 \cdot (-7)^2$ = ...

Τι παρατηρείτε ως προς τον εκθέτη του αποτελέσματος και το άθροισμα των εκθετών της αρχικής παράστασης; ....

....

γ) $2 \cdot 2^5$ = ...

δ) $2^{34} \cdot 2^{51}$ = ...

6. Να εκτελέσετε τις πράξεις (αναλυτικά στις παραστάσεις α και β).

α) $2^7 : 2^4 = $ = ...

β) $(-2)^7 : (-2)^4 = \dfrac{(-2)^7}{(-2)^4}$ = ...

Τι παρατηρείτε ως προς τον εκθέτη του αποτελέσματος και τη διαφορά των εκθετών της αρχικής παράστασης; ....

....

γ) $\dfrac{(-3)^{34}}{(-3)^{29}}$ = ...

δ) $\dfrac{5^{56}}{5^{47}}$ = ...

Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$$

ή

Αν κάθε παράγοντας ενός γινομένου είναι υψωμένος στον ίδιο εκθέτη, μπορούμε να υψώσουμε το γινόμενο των παραγόντων στον εκθέτη αυτό.

$$\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$$

7. Να εκτελέσετε (αναλυτικά) τις πράξεις (με δύο τρόπους).

α) $(2 \cdot 3)^4$ =	**β)** $(2 \cdot 3)^4$ =

Τι παρατηρείτε; ....

....

8. Να εκτελέσετε τις πράξεις.

α) $(20 \cdot 5)^4$ =	**β)** $5^3 \cdot 20^3$ =

Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$$

Αν κάθε όρος ενός πηλίκου είναι υψωμένος στον ίδιο εκθέτη μπορούμε να υψώσουμε το πηλίκο των όρων στον εκθέτη αυτό.

9. Να εκτελέσετε (αναλυτικά) την πράξη:

$\left(\dfrac{2}{9}\right)^3$ = ...

Τι παρατηρείτε; ....

....

10. Να εκτελέσετε τις πράξεις.

α) $\left(\frac{6}{5}\right)^3 =$	**β)** $\frac{9^4}{3^4} =$	**γ)** $16^3 : 8^3 =$

11. Να εκτελέσετε τις πράξεις

α) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 4^3 =$	**β)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 9^3 =$

Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.
$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$
Εφόσον ο εκθέτης μιας δύναμης μπορεί να γραφεί σε γινόμενο εκθετών, μπορούμε να υψώσουμε την βάση σε έναν όρο εκ του γινομένου των εκθετών, και στη συνέχεια την δύναμη που προκύπτει μπορούμε να την υψώσουμε στον άλλο όρο του γινομένου των εκθετών.

12. Να εκτελέσετε (αναλυτικά) την πράξη (με δύο τρόπους).

α) $(8^3)^7 =$	**β)** $(8^3)^7 = =$

Τι παρατηρείτε;

....

....

13. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

α) $3^2 \cdot 3^3$	**β)** $(-3)^3 \cdot (-3)^2$	**γ)** $3^7 : 3^5$	**δ)** $(2^3)^4$	**ε)** -2^3
στ) $\alpha^2 \cdot \alpha^3$	**ζ)** $(-\alpha)^3 \cdot (-\alpha)^2$	**η)** $\alpha^7 : \alpha^5$	**θ)** $(-\alpha^3)^4$	**ι)** $(\alpha^3)^4$
ια) $(\alpha^3)^4$	**ιβ)** $(2\alpha)^3$	**ιγ)** $(2\alpha^2)^3$	**ιδ)** $(\alpha^4 \cdot \alpha^2)^3$	**ιε)** $(-2^3\alpha)^2$

14. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

α) $\frac{(4^3)^6}{(4^2)^5 4^7} =$	**β)** $\frac{16 \cdot (\alpha^3)^6}{(2\alpha^2)^4 \alpha^2} =$

Η σειρά των πράξεων είναι η ακόλουθη:

1. Δυνάμεις,
2. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις
3. Προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, προηγούνται οι πράξεις μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.

15. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Pi = (-2)^3 \cdot 3 - 3^4 + (-2)^4 : 16 + [-1 - (-1)^7 \cdot 8]$

....

....

....

....

....

....

16. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Delta = 3(-4)^2 + (-5)(-1)^4 - 6(-2)^3$

....

....

....

....

17. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{(-4)^2}{2^2} - \frac{(21)^3}{(-7)^3} + \frac{(-28)^4}{(-6)^4}$

....

....

....

....

....

....

Α.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

~

Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα.

$α^0 = 1$

Η **δύναμη κάθε αριθμού**, διάφορου του μηδενός, με **εκθέτη αρνητικό** είναι ίση με κλάσμα που έχει **αριθμητή τη μονάδα** και **παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη**.

$$α^{-ν} = \frac{1}{α^ν} = \left(\frac{1}{α}\right)^ν$$

Επειδή τα κλάσματα $\frac{α}{β}$ και $\frac{β}{α}$ είναι αντίστροφα όπως και τα α και στην προηγούμενη σχέση, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει:

$$\left(\frac{α}{β}\right)^{-ν} = \left(\frac{β}{α}\right)^ν$$

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

18. Να εκτελέσετε την πράξη:

$\frac{5^7}{5^7}$ = ...

19. Να εκτελέσετε (αναλυτικά) τις πράξεις:

α) $\frac{2^7}{2^5}$ = ...

β) $\frac{2^7}{2^6}$ = ...

γ) $\frac{2^7}{2^7}$ = ...

δ) $\frac{2^7}{2^8}$ = ...

ε) $\frac{2^7}{2^9}$ = ...

20. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) 2^{-5}	**β)** -3^{-3}	**γ)** $(-234567)^0$	**δ)** $(-4)^{-2}$	**ε)** -4^{-2}

21. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $-(-2)^{-5}$	**β)** $(-3)^{-3}$	**γ)** $(α\cdotβ)^0$	**δ)** $-(-4)^{-2}$	**(ε)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

22. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$	**β)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$	**γ)** $-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$	**δ)** $-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$	**ε)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$

23. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $[(-3)^3]^2$	**β)** $3^3 : 3^{-2}$	**γ)** $(-2)^4 \cdot (-2)^6$	**δ)** $\frac{12^{-3}}{3^{-3}}$

24. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) 10^{-1}	**β)** 10^{-2}	**γ)** 10^{-3}	**δ)** 10^{-4}	**ε)** 10^{-5}	**στ)** 10^{-6}	**ζ)** 10^{-7}

Όταν έχουμε διαφορετικές βάσεις, είναι βολικό για την εφαρμογή των ιδιοτήτων να εκφράζουμε τους αριθμούς ως δυνάμεις με βάση το 2 ή το 3 π.χ. $32 = 2^5$ ή $81 = 3^4$

25. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $[(-3)^3]^2$	**β)** $3^3 : 3^{-2}$	**γ)** $(-2)^4 \cdot (-2)^6$	**δ)** $\dfrac{12^{-3}}{3^{-3}}$	**ε)** $(-2)^3 \cdot (-2)^{-5}$

26. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

α) $\mathbf{5^3 \cdot 5^{-2}}$	**β)** $\dfrac{(-4)^5}{(-4)^7}$	**γ)** $[(-2)^3]^{-2}$	**δ)** $\left(5^2\right)^{-3} \cdot 5^7$	**ε)** $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-13}$

27. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$A = (2^{-2} + 4^{-1})^{-1}$	$B = \dfrac{2-2^{-2}}{1-2^{-3}}$	$E = \dfrac{27^2 \cdot 3^2}{81^4}$

28. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$\Delta = \dfrac{2^4 \cdot 4^2}{8^3}$	$\Gamma = \dfrac{5^0 - 3^1}{3^{-1}} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^0$

29. Να απλοποιήσετε την παράσταση $Z = \dfrac{\left(\alpha^{-2}\right)^3 \cdot \alpha^{-2}}{\left(\alpha^3\right)^{-3}} \cdot \alpha^{-1}$ **για α ≠ 0.**

....

....

....

....

....

30. **Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης** $\mathrm{H}=(-3)^3-2^2+\left[(-1)^{1000}+4^2:(-8)\right]+(-2)^3:4$

....

....

....

....

31. **Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης** $\Theta=\left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-x}-x^x$ **για x = 2**

....

....

....

....

32. **Αν** $x=\left\{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^0\right\}^{100}$ **να υπολογίστε την παράσταση** $K=\frac{(-6)^5}{3^5}-\frac{8^4}{(-4)^4}+\frac{10^3}{(-5)^3}-(-x)^{2013}$

....

....

....

....

....

....

....

Ασκήσεις προς λύση

7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

7.1. Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα των παρακάτω πράξεων:

α) $(-3)^2-(+2)^3$ **β)** $(-3)^2\cdot(+2)^3$

γ) 3^2-3^3 **δ)** $3^2\cdot 3^3$

7.2. Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα των παρακάτω πράξεων:

α) 2^3+2^2 **β)** $\dfrac{2^3}{2^2}$

γ) $\left((-2)^3\right)^4$ **δ)** $\left((-2)^2\right)^2$

7.3. Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα των παρακάτω πράξεων:

α) $3(-4)^2+(-5)(-1)^4-6(-2)^4$

β) $3^2-4(-2)^2(-1)+2015^0$

γ) $2(-3)^2(-1)^4+3(-5)^2 2^3$

7.4. Να βρείτε τον αριθμό κ αν ισχύει: $7^{\kappa}+7^{\kappa}+7^{\kappa}+7^{\kappa}+7^{\kappa}+7^{\kappa}+7^{\kappa}=7^{19}$.

7.5. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $-3^2x=-27$ **β)** $(-3)^2y=3$

γ) $4^3k=4^7$ **δ)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot 3^2=-3\alpha$

7.6. Να γράψετε ως μια δύναμη με βάση το x τις παραστάσεις:

α) $x^3\cdot x^2\cdot x^0\cdot x^5$ **β)** $\dfrac{x^6\cdot x^{10}}{x^5}$, $x\neq 0$ **γ)** $\dfrac{x^2\cdot\left(x^3\right)^3\cdot x}{x^7\cdot x^4}$, $x\neq 0$

7.7. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

α) $y^0\cdot x^3\cdot y^4\cdot x$ **β)** $x^3\cdot y^2\cdot\left(xy^2\right)^3\cdot\left(x^6\right)^0\cdot\left(y^2\right)^2$ **γ)** $\dfrac{x^3\cdot\left(xy^4\right)^2\cdot y}{\left(x^2\right)^3\cdot y^3}$, με $x, y\neq 0$

7.8. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A=\dfrac{(-6)^2}{3^2}-\dfrac{(21)^3}{(-7)^3}+\dfrac{(-28)^4}{(-4)^4}$ $B=\dfrac{(-4)^{10}\cdot 3^7}{(-3)^5\cdot 4^9}-2(-1)^0$

7.9. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=2x-x^2+y^x-3(y-x)^3$, αν x = 2 και y = 1.

7.10. Τοποθετήστε τους αριθμούς σε σειρά από τον πιο μικρό ως τον πιο μεγάλο.

$\left(2^2\right)^3$ $\left((-2)^2\right)^2$ $\left(3^2\right)^2$ $\left((-2)^3\right)^2$ $3^{(-2)^3}$

7.11. Αν είναι $x=(-1+3)^2-(-1)^0$ και $y=(-2)^{2^2}$,ποια είναι η αριθμητική τιμή της παράστασης $A=\;y-15\;^2-2x^3$;

7.12. Αν ο ν είναι περιττός φυσικός να κάνετε τις πράξεις:

α) $x^{\nu}+(-x)^{\nu}$ **β)** $(-x)^{\nu}\cdot x^{\nu}$ **γ)** $\dfrac{x^{2\nu}}{(-x)^{2\nu}}$

7.13. Αν α = -1, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $M=(\alpha+1)^{2014}-(1-\alpha)^{3}+(\alpha+2)^{2015}$

7.9. Δυνάμεις ρητών με εκθέτη ακέραιο

7.14. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $9\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$ **β)** $(-16)^{3}:\left(4^{-2}\right)^{-3}$ **γ)** $\dfrac{3\cdot 3^{4}\cdot 3^{-2}\cdot 3^{-5}}{3^{0}\cdot 3^{-8}}$

7.15. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{3^{-2}\cdot(-2)^{-3}\cdot 8^{-1}\cdot(-10)^{2}}{4^{-2}\cdot 5^{3}\cdot(-3)^{-2}}$

7.16. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{(0,2)^{-1}-3(0,9)^{0}}{(0,1)^{-2}\cdot(10)^{2}-(-1)^{19}}$

7.17. Αν α = -1 και β = -1, να υπολογίσετε την παράσταση: $\left(\alpha^{2}\cdot\beta^{5}\right)^{3}\cdot\left(\alpha^{-3}\cdot\beta^{2}\right)^{-2}\cdot\beta$

7.18. Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $3^{-4}\cdot y=3$ **β)** $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}:k=3^{0}$ **γ)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}\cdot x=32$

7.19. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\left(\dfrac{2}{x}\right)^{-x+1}-(x+1)^{-x}+\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-2}$ αν x = 2.

7.20. Αν $x=-|-4|+|-2|$ και $y=|-10|-|11|$, να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{y^{x}-(-2)^{x}}{3y^{2}+(-x)^{y}}$.

7.21. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως δύναμη ενός αριθμού:

α) $\left(\dfrac{6}{7}\right)^{-4}\cdot\left(-\dfrac{7}{6}\right)^{7}$ **β)** $64^{-2}\cdot\left[32^{-1}:\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-3}\right]^{2}$

7.22. Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\dfrac{-5x^{3}}{3y^{6}}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{27y^{4}}{10x^{2}}\right)^{-3}$

7.23. Ποιος είναι ο μικρότερος από τους παρακάτω αριθμούς;

$0,01^{-3}$ 10^{-3} $0,1^{4}$ 100^{-1}

7.24. Να βρείτε την τιμή του y στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\dfrac{2^{y-2}}{2^{6}}=2^{0}$ **β)** $\dfrac{11^{6}}{11^{2y-3}}=11$

Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Κεφάλαιο 1,
Εξισώσεις-Ανισώσεις

Μέρος Α΄ Κεφάλαιο 1ο Εξισώσεις-Ανισώσεις

1.1. Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

~

Μεταβλητή

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γράμμα **x** για να αναπαραστήσουμε την διάρκεια κλήσης.

Από την στιγμή που το x μπορεί να αλλάζει τιμή, αποτελεί **μεταβλητή**.

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, **αριθμητική παράσταση**.

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα (ελληνικά ή λατινικά) για να παραστήσουμε μεταβλητές: y, z, t, α, β, γ, ...

Οι προσθετέοι λέγονται όροι της παράστασης.

1. Δραστηριότητα

Η ομιλία σε κινητό τηλέφωνο κοστίζει 0,005 € το δευτερόλεπτο.

Μελετήστε το μικροπείραμα (**mp1_1**) και απαντήστε στα ερωτήματα:

α) Τι παριστάνει το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου;

....

β) Πόσο κοστίζει ένα τηλεφώνημα διάρκειας 25 δευτερολέπτων, ένα άλλο διάρκειας 35 δευτερολέπτων και ένα άλλο διάρκειας 107 δευτερολέπτων;

....

....

....

γ) Πώς μεταβάλλεται το κόστος ενός τηλεφωνήματος καθώς αυξάνεται η διάρκειά του;

....

....

δ) Πόσο πρέπει να διαρκέσει ένα τηλεφώνημα ώστε να κοστίσει:

i) 0,5 € ....

ii) 1 € ....

iii) 1,5 € ....

ε) Συνήθως οι εταιρείες κινητής τηλεφωνίας χρεώνουν μία ελάχιστη διάρκεια ανά τηλεφώνημα. Αν ο ελάχιστος χρόνος χρέωσης είναι 30 δευτερόλεπτα και το κόστος ανά δευτερόλεπτο είναι 0,008 €, πόσο κοστίζει ένα τηλεφώνημα διάρκειας:

i) 20 δευτερολέπτων; ....

ii) Ενός λεπτού; ....

στ) Δώστε ένα παράδειγμα αριθμητικής παράστασης από το παραπάνω πρόβλημα.

....

ζ) Δώστε ένα παράδειγμα αλγεβρικής παράστασης από το παραπάνω πρόβλημα.

....

Πώς κάνουμε τις πράξεις σε μια αλγεβρική παράσταση;

Επιμεριστική ιδιότητα
(α + β) · γ = α · γ + β · γ

Επίσης ισχύει:
α · (β + γ) = α · β + α · γ
α · (β - γ) = α · β - α · γ
(β + γ) · α = β · α + γ · α
(β - γ) · α = β · α - γ · α

Η διαδικασία με την οποία γράφουμε σε απλούστερη μορφή μία αλγεβρική παράσταση, ονομάζεται «αναγωγή ομοίων όρων».

Όταν γράφουμε αλγεβρικές παραστάσεις, συνήθως δε βάζουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού (·) μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών ή μεταξύ των μεταβλητών. Γράφουμε δηλαδή 3xy αντί για 3·x·y. Επίσης, γράφουμε:
2(4xy - 1) + 3(2 - 5x)
αντί για
2·(4· x· y -1) + 3 ·(2 - 5·x).

Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού θα χρησιμοποιείται βέβαια, για τον πολλαπλασιασμό αριθμών:
3 · 5
ή
3·(–5).

Μπορούμε να κάνουμε αναγωγή όρων, με την προϋπόθεση ότι οι όροι είναι όμοιοι. Για παράδειγμα δεν μπορεί να γίνει αναγωγή των όρων 5y και $5y^2$ αφού δεν είναι όμοιοι.

2. Γράψτε μία δική σας αλγεβρική παράσταση που να περιέχει τουλάχιστον έναν πολλαπλασιασμό, μία πράξη με δύναμη, μία διαίρεση και δύο προσθέσεις.

....

3. Έστω η παράσταση $3x^2 - 4xy + 5y^3 - 7$.

α) Ποιοι είναι οι όροι της παράστασης;

....

β) Πόσα x υπάρχουν στην παράσταση;

....

γ) Πόσα x^2 υπάρχουν στην παράσταση;

....

δ) Ποιοι είναι οι σταθεροί όροι της παράστασης;

....

4. Εργαστείτε στο μικροπείραμα (mp1_2) και απαντήστε στα ερωτήματα:

α) Ποια σχέση ισχύει μεταξύ των εμβαδών Ε_1, Ε_2 και Ε, καθώς μεταβάλλονται τα α, β και γ;

β) Ισχύει η ίδια σχέση αν:

i) το α ή το β γίνει 0; ....

ii) το γ γίνει 0; ....

γ) Ποιος από τους δύο τρόπους υπολογισμού απαιτεί λιγότερες πράξεις;

....

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) 7 · α + 8 · α =	**β)** x - 2 · x =	**γ)** 5 · t - 6 · t - 8 · t =
....	....	....
....	....	....

6. Να γράψετε αν είναι εφικτό με απλούστερο τρόπο τις παραστάσεις:

α) 2x + 5	**β)** 3α + 4α - 12α	**γ)** ω + 3ω + 5ω + 7ω
....	....	....
....	....	....

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) 4y + 3x - 2y + x	**β)** y + 2ω - 3y + 2 + ω + 5
....	....
....	....
....	....

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.

α) 2(x + 5)	**β)** 2(3α - 12)	**γ)** -(-5ω + 7)
....	....	....
....	....	....

9. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: Α = 2(x + 3) - 4(x - 1) - 8, όταν x = -0,45.

Παράσταση	Βήματα
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

10. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=-(x+y)-(x+z)-2y+5z+3x$ **όταν** $x=2, y=-3, z=-1$.

....

....

....

....

....

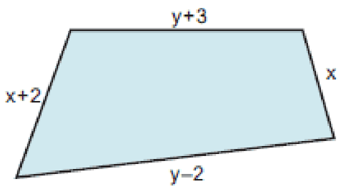
11. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου, όταν x + y = 10.

....

....

....

....



....

1.2. Εξισώσεις α΄ βαθμού

~

Αν $\alpha = \beta$ τότε ισχύει: $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

Αν $\alpha = \beta$ τότε ισχύει: $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$

Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

Αν $\alpha = \beta$ τότε ισχύει: $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

Αν $\alpha = \beta$ τότε ισχύει: $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ με $\gamma \neq 0$

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

12. Μελετήστε το μικροπείραμα (mp1_3) και απαντήστε στα ερωτήματα:

α) Πόσοι κύβοι υπάρχουν στον δεξί δίσκο; ....

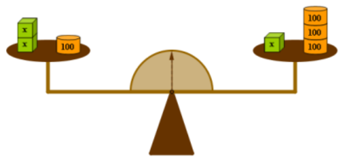
β) Πόσα βαρίδια των 100 γραμμαρίων υπάρχουν στον δεξί δίσκο; ....

γ) Πόσοι κύβοι υπάρχουν στον αριστερό δίσκο; ....

δ) Πόσα βαρίδια των 100 γραμμαρίων υπάρχουν στον αριστερό δίσκο; ....

ε) Προσθέστε ένα βαρίδιο 100 γραμμαρίων στον ένα δίσκο. Για να ισορροπήσει πάλι η ζυγαριά τι θα κάνετε; ....

στ) Αφαιρέστε δύο βαρίδια 100 γραμμαρίων από τον ένα δίσκο. Για να ισορροπήσει πάλι η ζυγαριά τι θα κάνετε; ....



ζ) Διπλασιάστε το βάρος του δεξιού δίσκου.

η) Πόσοι κύβοι υπάρχουν τώρα στον δεξί δίσκο; ....

θ) Πόσα βαρίδια των 100 γραμμαρίων υπάρχουν στον δεξί δίσκο; ....

ι) Για να ισορροπήσει πάλι η ζυγαριά τι θα κάνετε; ....

ια) Πόσοι κύβοι υπάρχουν τώρα στον αριστερό δίσκο; ....

ιβ) Πόσα βαρίδια των 100 γραμμαρίων υπάρχουν στον αριστερό δίσκο; ....

ιγ) Υπολογίστε το βάρος του κύβου με την βοήθεια των δρομέων. ....

Καταγράψτε τον τρόπο που εργαστήκατε.

....

....

....

....

....

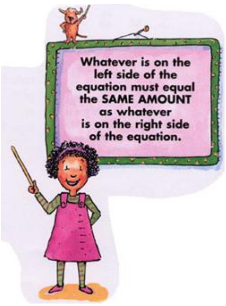
....

....

....

....

Εξίσωση



Διαδικασία επίλυσης

Για την επίλυση της εξίσωσης «απομονώσαμε» το x στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, προσθέτοντας ή αφαιρώντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό.
Η τιμή που επαληθεύει την εξίσωση λέγεται λύση ή ρίζα της εξίσωσης.

Σε μία εξίσωση μπορούμε να **«μεταφέρουμε»** όρους από το ένα μέλος στο άλλο, **αλλάζοντας το πρόσημό τους.**

Επαλήθευση

Για να λύνουμε εξισώσεις μπορούμε να τις γράφουμε με διάφορους τρόπους.

- Η μεταβλητή x σημαίνει 1x
- Το να αφαιρέσεις μία μεταβλητή είναι το ίδιο με το να προσθέσεις τον αντίθετό της.
  Δηλαδή
  4 - x = 4 + (-x)

ιδ) Ελέγξτε αν ισορροπεί η ζυγαριά στην περίπτωση που στο δεξί δίσκο έχει 6 κύβους και 2 βαρίδια των 100 γραμμαρίων, ενώ στον αριστερό δίσκο έχει 4 κύβους και 6 βαρίδια των 100 γραμμαρίων.

Η ισότητα 6x + 200 = 4x + 600 που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x, ονομάζεται **εξίσωση**.

Η παράσταση 6x + 200 λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση 4x + 600 λέγεται **δεύτερο μέλος** αυτής.

Για να λύσουμε την εξίσωση, δηλαδή για να βρούμε την τιμή της μεταβλητής x:

Εξίσωση 6x + 200 = 4x + 600	Βήματα
6x + 200 - 200 = 4x + 600 - 200	Αφαιρούμε το 200 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης
6x = 4x + 400	Κάνουμε τις πράξεις
6x - 4x= 4x + 400 - 4x	Αφαιρούμε 4x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης
(6 - 4)x = 400	Αναγωγή ομοίων όρων
2x = 400	Κάνουμε πράξεις
$\frac{2x}{2}=\frac{400}{2}$	Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης
x = 200	Απλοποιούμε τα κλάσματα

Για να επαληθεύσουμε:

6x + 200 = 4x + 600

$6 \cdot 200 + 200 \overset{;}{=} 4 \cdot 200 + 600$

1200 + 200 = 800 + 600

1400 = 1400 ✓

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) 2y - 3 = 7
....
....
....
....

β) 5 = 4m + 1
....
....
....
....

γ) 3z - 2 = -8
....
....
....
....

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $-x+7=12$
....
....
....
....

β) $-11=-b+6$
....
....
....
....

γ) $-9-m=-2$
....
....
....
....

Οι παρανομαστές χρειάζεται να απλοποιούνται κατά την επίλυση της εξίσωσης.

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2}{5}x = 1$

β) $-\frac{y}{8} = 2$

γ) $-2 = \frac{4c}{9}$

Αξιοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2(8 + x) = 22$

β) $m + 5(m - 1) = 11$

γ) $15 = -3(x - 1) + 9$

Ο αριθμητικός παράγοντας καλείται συντελεστής του αγνώστου

17. Να λύσετε την εξίσωση: $2(x - 1) + 3(2 - x)= 4(x + 2)$

Αν η εξίσωση έχει και παρονομαστές, μπορούμε, να εργαστούμε ώστε να προκύψει εξίσωση χωρίς παρονομαστές.

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2 \cdot 3 \cdot x = 5$

β) $\alpha - 4\alpha = 2$

γ) $-8 = -(x + 1)$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με ένα κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών.

Συνήθως επιλέγουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.

Η διαδικασία αυτή λέγεται απαλοιφή παρονομαστών.

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{m}{3} - 18 = 7$

β) $2 = -1 - \frac{k}{12}$

γ) $14 + \frac{h}{5} = 2$

20. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x=18$

....

....

....

....

21. Να λύσετε την εξίσωση $-\frac{y-1}{2}=\frac{2y+3}{3}-2$

....

....

....

....

....

Μέθοδος χιαστί

$$\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$$

$$α\cdot δ=β\cdot γ$$

Βήματα

1. Απαλοιφή παρανομαστών
2. Πράξεις
3. Γνωστοί-άγνωστοι
4. Αναγωγή ομοίων όρων
5. Διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου
6. Επαλήθευση

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x}{3}=\frac{1}{4}$

....

....

....

....

....

β) $\frac{x}{10}=-\frac{2x}{5}$

....

....

....

....

....

γ) $\frac{5α-1}{8}=\frac{1}{4}$

....

....

....

....

....

23. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{y+1}{2}+y=\frac{2y+3}{3}+2$

....

....

....

....

....

Όταν λύνουμε μία εξίσωση και καταλήγουμε στη μορφή 0x = α, με α ≠ 0, δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με το συντελεστή του αγνώστου γιατί, δε γίνεται διαίρεση με το 0. Έτσι, δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς x.
Όμως, για κάθε τιμή του x, το πρώτο μέλος της εξίσωσης ισούται πάντα με 0, οπότε δε μπορεί να είναι ίσο με α. Επομένως, μια τέτοια εξίσωση δεν έχει καμία λύση και λέγεται **αδύνατη**.

Η εξίσωση 0x = 0 επαληθεύεται για όλες τις τιμές του x. Για παράδειγμα:
0 · 2 = 0,
0 · 3 = 0,
0 · (-7) = 0 κ.τ.λ. Δηλαδή, κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα**.

24. Να λύσετε την εξίσωση $2(3 - x) + 4(x - 1) = 2x + 5$.

....

....

....

....

....

....

25. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3}{5}-\frac{2x+1}{10}=\frac{5-2x}{10}$

....

....

....

....

....

26. Να λύσετε την εξίσωση $3\cdot\frac{x}{4}=-\frac{11}{12}-\frac{1}{6}x$

....

....

....

....

....

....

27. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{x+1}{4}$

28. Να λύσετε την εξίσωση $x-\frac{3}{2}\left(x-\frac{x-2}{5}\right)=3\cdot\frac{2x-3(x-1)}{2}$

29. Για ποια τιμή του x είναι A = B;

α) A = 3x - 7, B = 5 - 9x

β) $A=3(x-1)+\frac{7}{2}, \quad B=4+\frac{x}{3}$

1.4. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

~

30. Δραστηριότητα

Στις 14 Ιουνίου 1987 η εθνική μας ομάδα μπάσκετ κατέκτησε το Πανευρωπαϊκό Πρωτάθλημα νικώντας στο στάδιο Ειρήνης και Φιλίας, στον τελικό, την πανίσχυρη ομάδα της τότε Σοβιετικής Ένωσης με 103-101 (**δείτε τα τελευταία λεπτά στο βίντεο**). Πρωταγωνιστής και σούπερ - σταρ τής βραδιάς ήταν ο Νίκος Γκάλης που πέτυχε 40 πόντους. Ο Γκάλης είχε σε εκείνο τον αγώνα 22 εύστοχες βολές (εύστοχα καλάθια), από τις οποία 8 καλάθια ήταν βολές του 1 πόντου και τα υπόλοιπα 14 ήταν καλάθια των 2 ή των 3 πόντων. Πόσα τρίποντα πέτυχε εκείνο το βράδυ ο Γκάλης;

....

....

....

....

....

....

....

31. Να συμπληρώσετε τις προτάσεις με τη χρήση μεταβλητών

α) Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 7.

Αν x ο μικρότερος τότε ………… ο μεγαλύτερος.

Αν x ο μεγαλύτερος τότε ………… ο μικρότερος.

β) Στην τάξη υπάρχουν 28 μαθητές και μαθήτριες.

Αν x οι μαθητές τότε ………… οι μαθήτριες.

Αν y οι μαθήτριες τότε ………… οι μαθητές.

γ) Αν α η πλευρά τετραγώνου τότε ………… η περίμετρος του.

δ) Αν x είναι ένας αριθμός τότε ο τριπλάσιος του αυξημένος κατά 3 είναι …………

ε) Η ηλικία ενός πατέρα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιού του.

Αν x η ηλικία του γιού τότε η ηλικία του πατέρα είναι …………

Αν x η ηλικία του πατέρα τότε η ηλικία του γιού είναι …………

στ) Τρεις διαδοχικοί ακέραιοι είναι οι x, ………… και …………

ζ) Αν x μαθητές μιας τάξης τότε τα πόδια τους είναι …………

η) Αν ω είναι μια γωνία τότε η κατά 40^{o} μεγαλύτερη από το μισό της είναι …………

- Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα και διακρίνουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα.
- Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε.
- Εκφράζουμε όλα τα άλλα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x.
- Γράφουμε την εξίσωση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης.
- Λύνουμε την εξίσωση.
- Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

32. Να βρείτε τον αριθμό που το διπλάσιό του, αν το ελαττώσουμε κατά 8, δίνει τον αριθμό αυξημένο κατά 9.

....

....

33. Να βρείτε τον αριθμό που όταν τον προσθέσουμε στους αριθμητές των κλασμάτων $\frac{3}{2}$ και $\frac{7}{3}$ γίνονται ίσα τα κλάσματα.

....

....

....

....

34. Μία βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες; Μελετήστε το μικροπείραμα mp1_4.

....

....

....

....

....

35. Μία μαθήτρια έγραψε 16 και 18 σε δύο διαγωνίσματα Μαθηματικών.

α) Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 18 και στα τρία διαγωνίσματα;

β) Μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19;

....

....

....

....

....

36. Τρία αδέλφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 € ακόμη, ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 € ακόμη και ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 € ακόμη. Να βρείτε το αρχικό χρηματικό ποσό και το μερίδιο του καθενός.

....

....

....

....

....

37. Σε μια συγκέντρωση οι άνδρες είναι διπλάσιοι από τις γυναίκες. Όταν έφυγαν έξι άνδρες με τις έξι συζύγους τους έμειναν τριπλάσιοι άνδρες από τις γυναίκες. Πόσες ήταν οι γυναίκες και πόσοι οι άνδρες στην αρχή της συγκέντρωσης.

....

....

....

....

....

38. Σε ένα τεστ με 10 ερωτήσεις η κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες ενώ για κάθε λάθος απάντηση αφαιρούνται 3 μονάδες. Αν ο μαθητής πέτυχε 26 μονάδες να βρεθεί σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;

....

....

....

....

....

1.5. Ανισώσεις α΄ βαθμού

~

< είναι μικρότερο από
≤ είναι μικρότερο ή ίσο από
> είναι μεγαλύτερο από
≥ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από
≠ δεν είναι ίσο με

39. Με την χρήση μίας μεταβλητής να γράψετε μία ανίσωση για κάθε εικόνα.

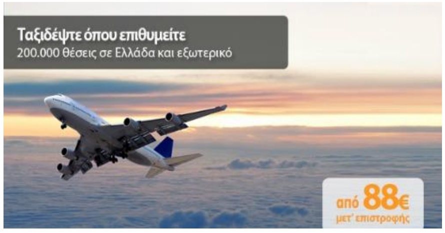
α)

....

β)

....

γ)



....

40. Με την χρήση μίας μεταβλητής να γράψετε μία ανίσωση για κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.

α) Άτομα κάτω των 17 δεν επιτρέπονται. ....

β) Η ορατότητα είναι μικρότερη από 3,2 km. ....

Κάθε τιμή της μεταβλητής που κάνει την ανίσωση αληθή καλείται λύση της ανίσωσης. Για παράδειγμα: Οι λύσεις της ανίσωσης x < 3 είναι όλοι οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 3.

41. Να περιγράψετε μία άλλη περίπτωση που μπορεί να παρουσιαστεί με τη χρήση ανίσωσης. Να γράψετε την αντίστοιχη ανίσωση.

....

....

42. Δίνονται οι παρακάτω αριθμοί.

i) 1 ii) $-7{,}3$ iii) 9,004 iv) 0 v) 3 vi) $\frac{2895}{3247}$

α) Ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς αποτελούν λύση της ανίσωσης x < 3. Καταγράψτε τους αριθμούς ....

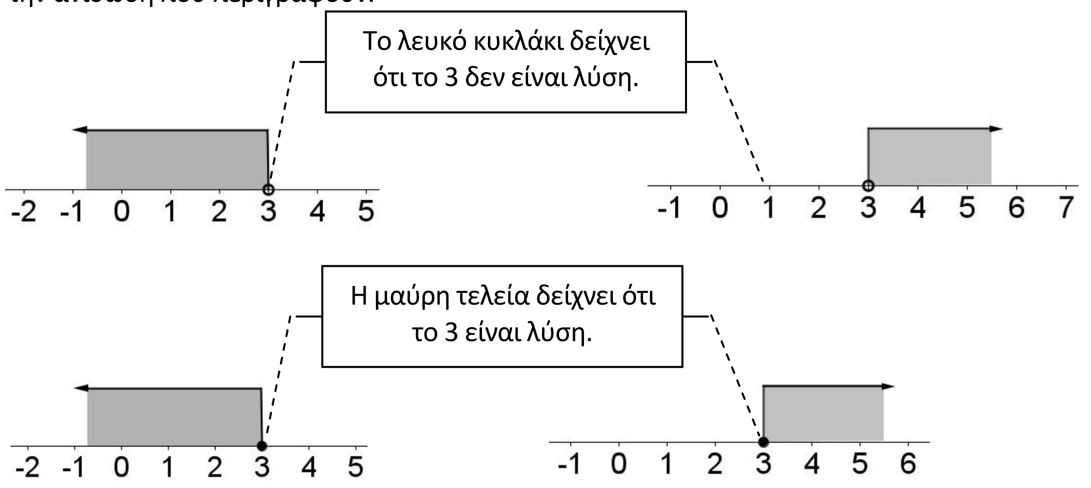
β) Δώστε μερικές ακόμα λύσεις της x < 3.

....

γ) Πόσες λύσεις έχει η ανίσωση x < 3; ....

Αν ένας αριθμός α είναι μικρότερος από τον αριθμό β, τότε ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β στην ευθεία των αριθμών. Επίσης ο β βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον α.

Στην ευθεία των αριθμών παρουσιάζονται οι λύσεις της ανίσωσης x < 3, μαζί με τις λύσεις τριών άλλων ανισώσεων οι οποίες συγκρίνουν το x με το 3. Για κάθε περίπτωση να γράψετε την ανίσωση που περιγράφουν.



43. Να εξηγήσετε σε τι διαφέρει η ανίσωση x < 3 από την εξίσωση x = 3.

....

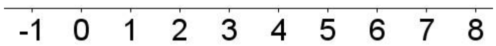
....

44. α) Να περιγράψετε πώς θα παρουσιάζατε τις λύσεις της ανίσωσης x ≠ 3 στην ευθεία των αριθμών.

....

....

β) Να παρουσιάσετε τις λύσεις της ανίσωσης x ≠ 3.



Η ανίσωση 4 > x μπορεί να γραφεί και ως x < 4.

Όταν η μεταβλητή βρίσκεται στα αριστερά, το σύμβολο της ανίσωσης δείχνει στην ίδια κατεύθυνση που φαίνεται και στην ευθεία των αριθμών.

45. α) Να ξαναγράψετε κάθε ανίσωση, ώστε η μεταβλητή να είναι στα αριστερά.

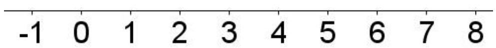
i) 2 < x ....

ii) -5 ≥ β ....

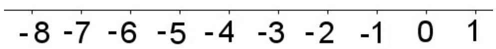
iii) 0 ≤ u ....

β) Να παρουσιάσετε τις λύσεις κάθε ανίσωσης.

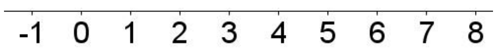
i)



ii)



iii)



Χρησιμοποιώντας πρόσθεση και αφαίρεση για την επίλυση ανισώσεων.

Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $α<β$ τότε
$α+γ<β+γ$
και
$α-γ<β-γ$

Αν $α>β$ τότε
$α+γ>β+γ$
και
$α-γ>β-γ$

46. Ισχύει ότι $-4<1$. Ελέγξτε τι συμβαίνει αν προσθέσετε τον αριθμό 2 σε κάθε μέλος της ανίσωσης.

$-4<1$

$-4+2<1+2$

$-2<3$

Τι παρατηρείτε;

....

....

....

....

Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\alpha<\beta$ τότε
$\alpha+\gamma<\beta+\gamma$
και
$\alpha-\gamma<\beta-\gamma$.

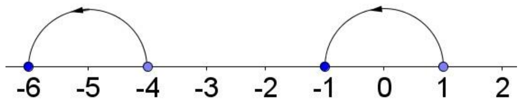
Αν $\alpha>\beta$ τότε
$\alpha+\gamma>\beta+\gamma$
και
$\alpha-\gamma>\beta-\gamma$

47. Ισχύει ότι $-4<1$. Ελέγξτε τι συμβαίνει αν αφαιρέσετε τον αριθμό 2 από κάθε μέλος της ανίσωσης.

$-4<1$

$-4-2<1-2$

$-6<-1$



Τι παρατηρείτε; ....

48. Ποιον αριθμό χρειάζεται να προσθέσετε σε κάθε μέλος των παρακάτω ανισώσεων ώστε να προκύψει απλούστερη ανίσωση;

α) $x-3>-2$ ....

β) $0<-\frac{4}{3}+s$ ....

γ) $1\leq z-4$ ....

49. Ποιον αριθμό χρειάζεται να αφαιρέσετε σε κάθε μέλος των παρακάτω ανισώσεων ώστε να προκύψει απλούστερη ανίσωση;

α) $x+3>-2$ ....

β) $0<\frac{4}{3}+s$ ....

γ) $1\leq z+4$ ....

50. α) Να λύσετε την ανίσωση $x-3<5$

....

....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

γ) Αντικαταστήστε το x με έναν αριθμό μεγαλύτερο του 8 και εκτελέστε τις πράξεις στην ανίσωση $x-3<5$. Είναι αληθής η ανίσωση; ....

δ) Αντικαταστήστε το x με τον αριθμό 8 και εκτελέστε τις πράξεις στην ανίσωση $x-3<5$. Είναι αληθής η ανίσωση; ....

ε) Αντικαταστήστε το x με έναν αριθμό μικρότερο του 8 και εκτελέστε τις πράξεις στην ανίσωση $x-3<5$. Είναι αληθής η ανίσωση; ....

51. α) Να λύσετε την ανίσωση $y-2>-4$

....

....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

52. α) Να λύσετε την ανίσωση $y+2<-6$.

....

....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό και διαίρεση για την επίλυση ανισώσεων.

Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν α < β και γ > 0 τότε
$\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
και
$\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν α > β και γ > 0 τότε
$\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
και
$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

53. Εργαστείτε με τον διπλανό σας και διερευνήστε τι συμβαίνει σε μία ανίσωση όταν πολλαπλασιάζεται κάθε μέλος της με τον ίδιο αριθμό.

α) Συμπληρώστε το κενό σε κάθε πρόταση, θέτοντας μέσα στο κενό $\square$ το σύμβολο <, > ή =.

i) $4 > 1$

ii) $3 \cdot 4 \square 3 \cdot 1$

iii) $2 \cdot 4 \square 2 \cdot 1$

iv) $1 \cdot 4 \square 1 \cdot 1$

v) $0 \cdot 4 \square 0 \cdot 1$

vi) $-1 \cdot 4 \square -1 \cdot 1$

vii) $-2 \cdot 4 \square -2 \cdot 1$

viii) $-3 \cdot 4 \square -3 \cdot 1$

β) Τι συμβαίνει στην ανίσωση όταν πολλαπλασιάζεται κάθε μέλος της

i) με έναν θετικό αριθμό; ....

ii) με το μηδέν; ....

iii) με έναν αρνητικό αριθμό; ....

54. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x}{2} < -1$.

....

....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

γ) Να περιγράψετε τις λύσεις για την ανίσωση $\frac{x}{2} \le -1$.

....

....

55. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $2x \le -4$.

....

....

....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

56. Η Μαρία έλυσε την ανίσωση $-2>\frac{y}{3}$ και βρήκε ότι $-6>y$. Η Κατερίνα έλυσε την ίδια ανίσωση και βρήκε $y<-6$. Είναι και οι δύο λύσεις σωστές; Εξηγήστε γιατί.

....

....

....

57. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $-2x\leq -4$.

....

....

....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την αντίστροφη φορά. Δηλαδή:

Αν α < β και γ < 0 τότε
$\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
και
$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν α > β και γ < 0 τότε
$\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
και
$\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

58. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{2}{3}x\geq 2$.

....

....

....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Δεν πολλαπλασιάζουμε τα μέλη μίας ανίσωσης με τον αριθμό 0.

59. **α)** Να λύσετε την ανίσωση $-x<\frac{1}{2}$.

....

....

....

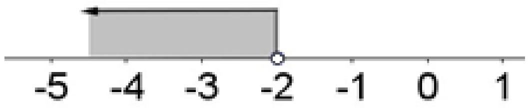
Δεν μπορούμε να διαιρέσουμε τα μέλη μίας ανίσωσης με τον αριθμό 0.

β) Να καταγράψετε τέσσερις ακέραιους αριθμούς που αποτελούν λύση της παραπάνω ανίσωσης . ...

60. **α)** Με ποιον αριθμό μπορείτε να διαιρέσετε κάθε μέλος της ανίσωσης $-x\leq 7$ για να λάβετε $x\geq -7$;

β) Με ποιον αριθμό μπορείτε να πολλαπλασιάσετε κάθε μέλος της ανίσωσης $-x>-3$ για να λάβετε $x<3$; ....

61. Η ακόλουθη ευθεία των αριθμών δείχνει τις λύσεις μίας ανίσωσης.



Ποιες από τις ακόλουθες είναι η ανίσωση;

α) $-2x > 4$

β) $-4 > 2x$

γ) $-x < 2$

δ) $8 < -4x$

ε) $-2 > x$

62. Να εκτιμήσετε τη λύση κάθε ανίσωσης.

α) $-2,099x < 4$ ....

β) $3,87y \geq -24$ ....

63. Να λύσετε τις ανισώσεις.

α) $\frac{3x}{2} \geq -45$	**β)** $2 < -8x$	**γ)** $0 < -7x$
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

64. Ο Αποστόλης έλυσε την ανίσωση $-15x \leq 135$ προσθέτοντας 15 σε κάθε μέλος της ανίσωσης. Τι λάθος έκανε;

....

....

....

....

65. Ο Αποστόλης έλυσε την ανίσωση $-\frac{3x}{4} \leq 12$ και βρήκε ότι $x \leq -16$. Τι λάθος έκανε;

....

....

....

....

Αξιοποιώντας τις ιδιότητες για την επίλυση ανισώσεων.

Θυμόμαστε να αλλάζουμε την φορά της ανίσωσης όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με αρνητικό αριθμό.

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, εφόσον η ανίσωση έχει παρονομαστές

66. Να λύσετε την ανίσωση $3x+100>x+400$.

	Βήματα
....	Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
....	Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων
....	Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου
....	Απλοποιούμε το κλάσμα

67. Να λύσετε την ανίσωση 2(x - 1) - 3 (x + 1) ≤ 4 (x + 2) + 12. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

	Βήματα
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

68. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{5-x}{4}+\frac{x+2}{8}\geq x$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

	Βήματα
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

Όταν η ανίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του αριθμού x. Η παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών είναι όλη η ευθεία.

Όταν η ανίσωση δεν αληθεύει για καμιά τιμή του αριθμού x. λέμε ότι η ανίσωση είναι αδύνατη. Στην παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών δε θα σημειώσουμε τίποτα, γιατί κανένας αριθμός δεν είναι λύση αυτής της ανίσωσης.

69. Να λύσετε την ανίσωση $2(x - 1) - 3(x + 2) < 4(x + 1) - 5(x - 2)$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

....

....

....

....

70. Να λύσετε την ανίσωση $x + 2 + 2(x - 3) > 3x + 4$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

....

....

....

....

71. Να λύσετε την ανίσωση $x - \frac{x}{2} - \frac{3x-1}{4} < 1$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

....

....

....

....

....

....

72. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{8-x}{6} + \frac{2(x-1)}{3} \le \frac{1}{2}(x+6) - \frac{x}{3}$. Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

....

....

....

....

....

....

73. Να λύσετε την ανίσωση $x-2-\frac{7x-5}{6}>\frac{3x-2}{3}$ Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

74. Να λύσετε την ανίσωση $10-\left[x-3(x-2)\right]<2x-3$ Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

……

……

……

……

……

……

……

……

75. Να λύσετε την ανίσωση $x-2\left[1-(x-1)\right]>3x-5$ Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

……

……

……

……

……

……

……

Εύρεση κοινών λύσεων εξισώσεων

Μπορούμε να γράψουμε τις δύο ανισώσεις ως μία ανίσωση:

- $12 < \theta < 17$

Την ανίσωση αυτή μπορούμε να την διαβάσουμε ως εξής:

- θ είναι μεγαλύτερη από 12 και μικρότερη του 17
- θ είναι μεταξύ 12 και 17.

Μπορούμε να γράψουμε τις δύο ανισώσεις ως μία ανίσωση:

- $12 \le \theta \le 17$

Την ανίσωση αυτή μπορούμε να την διαβάσουμε ως εξής:

- θ είναι μεγαλύτερη ή ίση από 12 και μικρότερη ή ίση του 17
- θ είναι από 12 μέχρι και 17.

Η ανίσωση χωρίζεται σε δύο ανισώσεις, οι οποίες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα, δηλαδή να συναληθεύουν.

Στη συνέχεια παριστάνουμε τις λύσεις κάθε μίας από τις ανισώσεις στην ευθεία των αριθμών.

Ακολούθως σχεδιάζουμε τις παραστάσεις των δύο λύσεων στην ευθεία των αριθμών.
Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις.

76. Σήμερα η θερμοκρασία θα είναι υψηλότερη από 12^o C, αλλά δεν θα ξεπεράσει τους 17^o C.

α) Να γράψετε την παραπάνω πρόβλεψη σε μορφή ανίσωσης.

....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

77. Σήμερα η θερμοκρασία θα είναι υψηλότερη ή ίση με 12^o C και θα είναι χαμηλότερη ή ίση με 17^o C.

α) Να γράψετε την παραπάνω πρόβλεψη σε μορφή ανίσωσης.

....

β) Να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

78. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x+1}{3} \le 2 \le \frac{3-x}{2}$.

Χωρίζουμε την ανίσωση σε δύο ανισώσεις και τις λύνουμε χωριστά.

$\frac{x+1}{3} \le 2$	$2 \le \frac{3-x}{2}$
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

Η παράσταση των λύσεων των ανισώσεων στην ευθεία των αριθμών είναι η ακόλουθη:

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε την παράσταση των δύο λύσεων στην ίδια ευθεία.

79. **α)** Να λύσετε τις ανισώσεις $\frac{4-5x}{12}-\frac{3x-3}{2}\geq 2x-6$ και $4(5x+7)+2>2(x-3)$

β) Να παραστήσετε γραφικά σε άξονα τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων και να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις αυτών.

γ) Ποιοι από τους αριθμούς 2, $\frac{5}{12}$, 0 και $-\frac{5}{2}$ είναι κοινές λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων;

80. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{3x-8}{2}<3x-2\leq\frac{5x-3}{3}$ και να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

Ασκήσεις προς λύση

1.1. Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω εκφράσεις:
- **α)** Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 3 κιλά πορτοκάλια.
- **β)** Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά τρία.
- **γ)** Το τριπλάσιο της διαφοράς δύο αριθμών.

1.2. Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω εκφράσεις:
- **α)** Το κόστος για να αγοράσουμε δύο κιλά μήλα και τρία κιλά πορτοκάλια.
- **β)** Την τελική τιμή ενός προϊόντος, αν το αγοράσουμε με έκπτωση 25%.
- **γ)** Ο Κώστας έχει 10% περισσότερα χρήματα από τον Γιώργο.

1.3. Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω εκφράσεις:
- **α)** Το τριπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 2.
- **β)** Την περίμετρο ενός ορθογωνίου, αν το μήκος του είναι 2cm μεγαλύτερο από το πλάτος του.

1.4. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 20cm.Αν είναι y η μία πλευρά του ορθογωνίου, να βρείτε:
- **α)** μια αλγεβρική παράσταση που να παριστάνει την άλλη πλευρά του ορθογωνίου.
- **β)** μια αλγεβρική παράσταση που να παριστάνει το εμβαδόν του ορθογωνίου.

1.5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $-3y+2x+8y-x$ **β)** $-\omega+10+6\alpha-3\omega+7-\alpha$ **γ)** $-(x+2)+3y-x+14y-8+2x$

1.6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=-(x+z)-(y+z)+2x+5y+3z$ όταν x=2,y=-3,z=-1

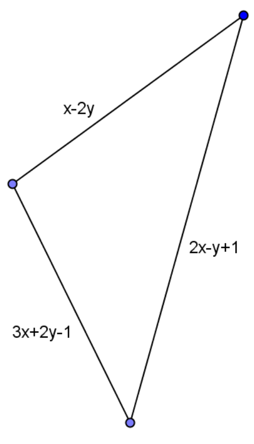
1.7. Αν $\alpha-\gamma=-1, \beta-y=-2, x+z=4$,να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=3\alpha-2\beta-3\gamma-x+2y-z-4$.

1.8. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=-(x-y)+z(1-x)-x(y-z)+x-y$ αν $z=-\frac{1}{2}$ και x, y αντίστροφοι αριθμοί.

1.9. Αν $x-y=\frac{1}{2}$ και $\alpha-\beta=-2$,να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=3x+\beta y+\alpha x-\alpha y-\beta x-3y$.

1.10. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B=2-\left[-x-(1-y)\right]-\left[3-(\alpha-\beta)\right]$ αν $x+\alpha=2, \beta+y=-2$.

1.11. Έστω $x-2y$, $2x-y+1$, $3x+2y-1$ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου.



- **α)** Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ως συνάρτηση των x,y.
- **β)** Αν x=2 και y=-1,να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.

1.12. Έστω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών $2\alpha-\beta$, $\gamma-\alpha$, το οποίο έχει περίμετρο 20 cm. Να υπολογίσετε την περίμετρο τριγώνου με μήκη πλευρών $\alpha+1$, $3-\beta$, $\gamma-4$.